Bonyolultságelmélet

Monday 16th September, 2019, 17:58

A kurzus teljesítési követelményei

Gyakorlat

- Három kisdolgozat 6–6 pontért kb. a 4., 7. és 9. gyakorlaton
- Ha a két legjobb kisdolgozat összege kevesebb, mint 6 pont (pl. 5.975), akkor a gyakorlat nem teljesített.
- Egy nagydolgozat 28 pontért utolsó héten előadáson
- Pontszám: **két legjobb** kis- plusz a nagydolgozat pontszáma
- Ha ≥ 16, a gyakorlat teljesítve. Ponthatárok: 16, 22, 28, 34.
- Egyébként a nagydolgozat javítása első vizsgaidőpontban
- Ha így már ≥ 16, a gyakorlati jegy elégséges
- Ha így sem, a gyakorlat és a kurzus nem teljesített

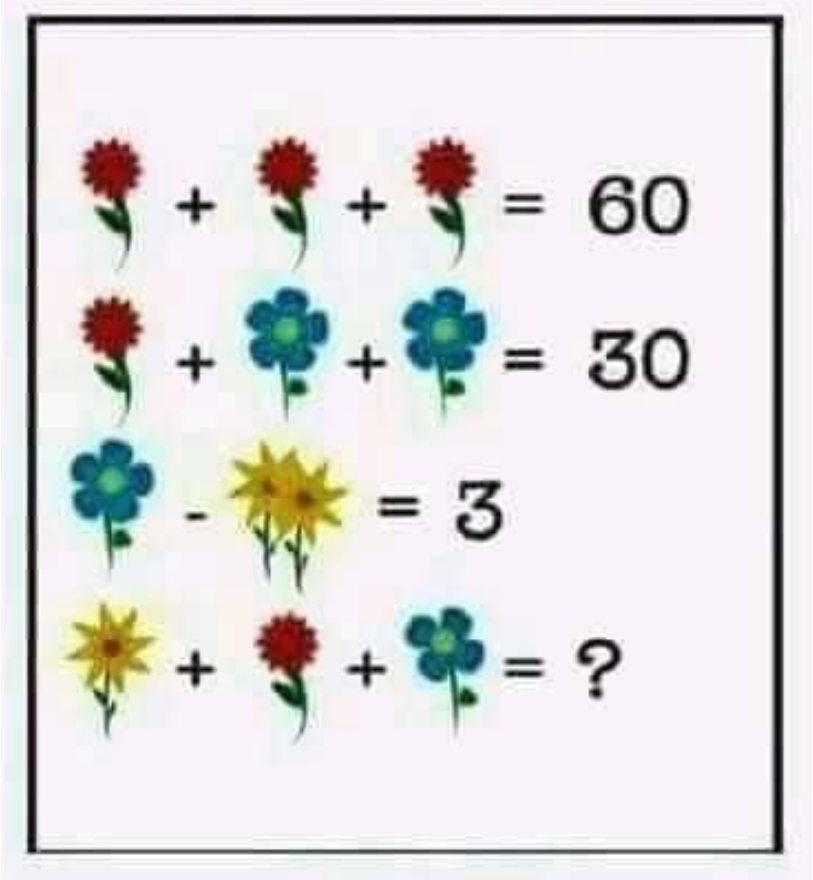
Vizsga

- Kiskérdérdések összesen 50 pontért
- Ponthatárok: 21, 26, 31, 41, **szóban megvédeni**

Az előadás felépítése

- A kiszámíthatóság- és a bonyolultságelmélet kialakulása
- Turing-gépek. A kiszámítás $\textsc{Ram}$ modellje.
- Problémák egymáshoz viszonyított nehézsége: a (hatékony) visszavezetés
- Eldönthetetlen problémák
- Bonyolultsági osztályok
- Teljesség, nehézség; **NP**-teljes problémák
- Approximáció, pszeudopolinomiális algoritmusok, parametrizált komplexitás
- **PSPACE**-nehéz problémák
- Randomizált algoritmusok
- Párhuzamosítás
- Kriptográfia

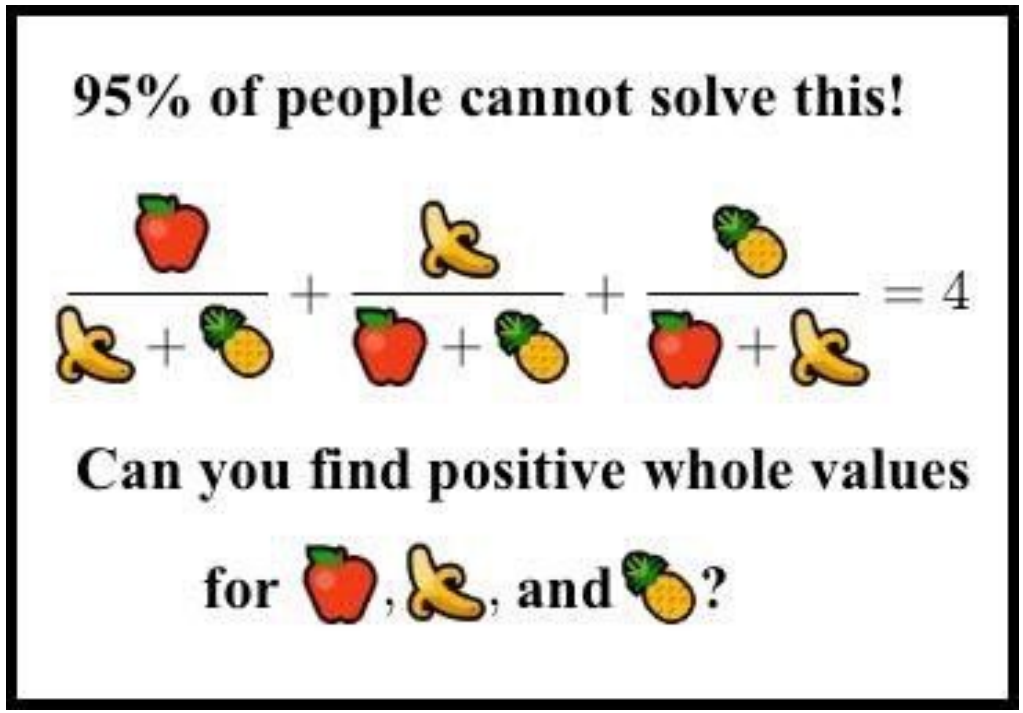
Warm-up



check this

- pirosvirág: 20
- kékvirág: 5
- sárgavirág: 1 (oh my so clever lulz)
- célfüggvény (lol): 26

Warm-up



check this

- alma: 154476802108746166441951315019919837485664325669565431700026634898253202035277999
- banán: 368751317941299998271978115652254748254929799689719709962831374716372246340555 79
- ananász: 437361267792869725786125260237139015281653755816161361862143799337842346777 2036

A kiszámíthatóság elméletének kialakulása

1900: Hilbert 10. problémája (a 23-ból)

Adott $p(x_1, \ldots, x_n)$ **egész együtthatós polinom**, létezik-e (egész értékű) zérushelye.

pl: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - 3x_1^2x_3 - 3x_1x_3^2 - 3x_2^2x_3 - 3x_2x_3^2 - 5x_1x_2x_3$.
🍎^{3} + 🍌^{3} + 🍍^{3} − 3🍎^{2}🍌 − 3🍎🍌^{2} − 3🍎^{2}🍍 − 3🍎🍍^{2} − 3🍌^{2}🍍 − 3🍌🍍^{2} − 5🍎🍌🍍.

1928: Hilbert

Találjunk olyan algoritmust, amellyel a **predikátumkalkulus** tetszőleges formulájáról eldönthetjük, hogy **tautológia**-e.

Megjegyzés

Algoritmusból sokkal kevesebb (megszámlálhatóan végtelen) van, mint eldöntési problémából (kontinuum) – Cantor, 1874 –, emiatt a problémák **túlnyomó többsége** megoldhatatlan.

A kiszámíthatóság elméletének kialakulása

Mi az, hogy valami kiszámítható?

1931, Gödel: Primitív rekurzív függvények

- $f(n) = 0$;
- $s(n) = n + 1$;
- $\pi_k^i(x_1, \ldots, x_k) = x_i$;
- f/n, $g_1/k, \ldots, g_n/k \Rightarrow h(\boldsymbol{x}) = f(g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_n(\boldsymbol{x}))$;
- f/k, $g/(k+2) \Rightarrow$

$$h(0, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}),$$
$$h(n+1, \boldsymbol{x}) = g(n, h(n, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}).$$

a primitív rekurzív függvények.

Néhány primitív rekurzív függvény

Példák

- $\mathrm{add}(0, x) = x$, $\mathrm{add}(n + 1, x) = \mathrm{add}(n, x) + 1$ – összeadás
- $\mathrm{mult}(0, x) = 0$, $\mathrm{mult}(n + 1, x) = \mathrm{add}(\mathrm{mult}(n, x), x)$ – szorzás
- $\mathrm{pow}(0, x) = 1$, $\mathrm{pow}(n + 1, x) = \mathrm{mult}(\mathrm{pow}(n, x), x)$ – hatványozás
- faktoriális, különbség, egyenlőség tesztelés, előjel, egészosztás, maradék, stb

A kiszámíthatóság elméletének kialakulása

Mi az, hogy valami kiszámítható?

1934, Gödel: Általános rekurzív függvények
A primitív rekurzív függvények konstrukciói, plusz:

- $f/(k+1) \Rightarrow h(\boldsymbol{x}) = \min_{n \geq 0}\{n : f(n, \boldsymbol{x}) = 0\}$.

az általános (parciális) rekurzív függvények.

Példa: Ackermann-függvény

$$A(0, n) = n + 1$$
$$A(m + 1, 0) = A(m, 1)$$
$$A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n))$$

pl. $A(1, 1) = A(0, A(1, 0)) = A(1, 0) + 1 = A(0, 1) + 1 = 2 + 1 = 3$.
Az Ackermann-függvény nem primitív, de általános rekurzív függvény.

A kiszámíthatóság elméletének kialakulása

Mi az, hogy valami kiszámítható?

- 1931, Gödel: Primitív rekurzív függvények
- 1934, Gödel: Általános rekurzív függvények
- 1930-as évek eleje, Church, Kleene, Rosser (Princeton): λ-definiálhatóság

1935: AMS New York-i összejövetele

Church tézise: Az általános rekurzív függvények (matematikai fogalom) megfelelnek az algoritmikusan kiszámítható függvény fogalmának (intuitív fogalom).

1936: Kleene

Az általános rekurzív függvények megegyeznek a λ-definiálható függvényekkel.

A kiszámíthatóság elméletének kialakulása

1936: Turing

Bebizonyítja, hogy a Turing-gép

- `https://www.youtube.com/watch?v=gJQTFhkhwPA`
- `https://www.youtube.com/watch?v=E3keLeMwfHY`
- `https://www.youtube.com/watch?v=FTSAiF9AHN4`

ekvivalens a λ-definiálhatósággal, és megfogalmazza azt a tézist, hogy a **Turing-gép megfelel az algoritmussal kiszámítható függvényeknek**.

A **Church-Turing tézist** tapasztalati tények és matematikai eredmények támasztják alá:

- Minden intuitív értelemben megoldható problémáról sikerült kimutatni, hogy azok megoldhatók a matematikai modellekben is.
- A matematikai modellek ekvivalensek.

A kiszámíthatóság elméletének kialakulása

Ezek után...

1936, '37: Church, Turing

Nem létezik olyan algoritmus, mely a predikátumkalkulus tetszőleges formulájáról eldöntené, hogy tautológia-e.

1971: Matijasevič

Hilbert 10. problémája algoritmikusan **megoldhatatlan**.

Kiszámíthatóság és bonyolultság

Kiszámíthatóságelmélet

Melyek az **algoritmikusan** megoldható problémák?

Bonyolultságelmélet

Melyek a **gyakorlatilag** megoldható problémák? (erőforrásigény)

1971: Cook

P és **NP** osztályok, **NP**-teljesség, SAT **NP**-teljes

1972: Karp

Rámutat az **NP**-teljes problémák változatosságára.

1973: Levin

Több kombinatorikus probléma „univerzális a kimerítő keresésre”.

További bonyolultsági osztályok és számítási módok

- **L**, **NL**, **PSPACE**, **EXP**, ...
- Valószínűségi modellek
- Párhuzamos számítás

stb.

Mit jelent az időigény?

Az alábbi táblázat megadja, hogy adott futásidejű algoritmus adott számítási kapacitású architektúrán mekkora inputra fut még le **egy napon belül**.

	 C64 1Mflops	 Cray Y-MP 1Gflops	 mai GPU 5TFlops	 Tianhe-2 34PFlops	 Föld bolygó 10EFlops
n	86.4G	8.64×10^{13}	4.32×10^{17}	2.94×10^{21}	8.64×10^{23}
$n \log n$	2.75G	2.1×10^{12}	8.1×10^{15}	4.5×10^{19}	1.17×10^{22}
n^2	300k	9.3M	657M	54G	929G
n^3	4420	44.208	756k	14.3M	95M
2^n	36	46	58	71	79
1.1^n	264	336	426	518	578
$n!$	14	16	19	22	24

Amíg Moore törvénye (nagyjából) igaz, addig a polinomidejű algoritmusok egy-egy újabb év elteltével konstans**szor** több adattal tudnak adott időn belül elbánni.

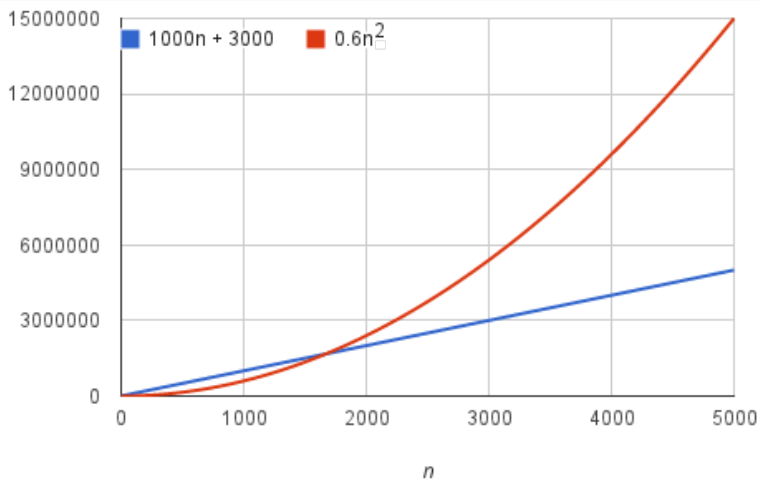
Aszimptotikus jelölések

Definíció

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvények.

- $\boldsymbol{f(n) = \mathcal{O}(g(n))}$, ha létezik olyan $c > 0$, hogy $f(n) \leq c \cdot g(n)$ majdnem minden n-re.
- $\boldsymbol{f(n) = \Omega(g(n))}$, ha $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.
- $\boldsymbol{f(n) = \Theta(g(n))}$, ha $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ és $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

Ha $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, de $g(n) \neq \mathcal{O}(f(n))$, annak jele $\boldsymbol{f(n) = o(g(n))}$. (és ω hasonlóan.)



$$1000n + 3000 = \mathcal{O}(0.6n^2)$$

Aszimptotikus jelölések

Határértékkel

Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \ldots$

- $\ldots = 0$, akkor $f(n) = o(g(n))$
- $\ldots < \infty$, akkor $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$

Példa

Ha $p(n)$ és $q(n)$ polinomok (pozitív főegyütthatóval), akkor

- $p(n) = \mathcal{O}(q(n))$ pontosan akkor, ha p fokszáma legfeljebb akkora, mint q-é;
- $p(n) = \Theta(q(n))$ pontosan akkor, ha fokszámaik megegyeznek.

Legyen $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Ekkor $p(n) = o(a^n)$.

A $\mathbf{P}$ osztály, informálisan

Definíció

Egy probléma a $\mathbf{P}$ **osztályba** esik, ha megoldható polinom időigényű (vagy $\mathcal{O}(n^k)$ időigényű) algoritmussal.

A Cobham – Edmonds tézis

- Egy algoritmus akkor ad **gyakorlatilag kielégítő** megoldást egy problémára, ha polinom időigényű.
- Egy problémát akkor tekintünk **gyakorlatilag megoldhatónak**, ha a $\mathbf{P}$ osztályba esik.

Néhány ellenvetés

- Elfogadható-e egy $\mathcal{O}(n^{100})$ időigényű algoritmus?
- A konstansok nagysága.
- Kisméretű adatokon egy exponenciális algoritmus is jobban viselkedhet, mint egy polinomiális.
- Legrosszabb eset helyett a várható viselkedés vizsgálata is indokolt lehet.
- A $\mathbf{P}$ osztályba eső egyes problémák hatékonyan párhuzamosíthatók, míg mások (valószínűleg) nem.

Ugyanakkor

- A gyakorlatban előforduló $\mathbf{P}$-beli problémák rendje kicsi. Pl. a lineáris programozás alapfeladatát megoldó első polinomidejű algoritmus, az **ellipszoid módszer** (1979, $\mathcal{O}(n^6 \cdot L)$) a **szimplex módszer** (1947) exponenciális futásidejű algoritmusánál a **gyakorlatban** lassabban futott. A szintén polinomidejű **projektív módszer** (1984, $\mathcal{O}(n^{3.5} L^2 \log L \log\log L)$) azonban már a gyakorlatban előforduló problémák esetében is gyorsabbnak bizonyult a szimplex módszernél.
- A $\mathbf{P}$ osztály elegáns matematikai elmélethez vezet.
- Fontos információkat szolgáltat a hatékonyan megoldható problémák szerkezetéről.

A kiszámítás modelljei

De milyen architektúrán polinom?

A kiszámításnak számos (matematikai) modellje létezik:

- Általános rekurzív függvények
- λ-kalkulus
- Turing-gép
- RAM (Random Access Machine)

A RAM gép

RAM gép

- rendelkezik végtelen sok **regiszterrel**
- a regiszterek típusai: **I**nput, **O**utput és **W**orking (munka-)regiszterek, minden típus regiszterei 0-tól indexeltek
- minden regiszter egy nemnegatív egész számot tartalmaz
- címzési módok:
  - k – konstans
  - $I[k]$, $O[k]$, $W[k]$ – direkt
  - $W[W[k]]$, $W[I[k]]$ stb. – indirekt

A RAM gép

RAM gép

- program: utasítások egy véges sorozata
- minden utasítás rendelkezik egy **sorszámmal** (egy sorszám legfeljebb egy utasításhoz tartozhat. . .)
- elemi műveletek:
  - $:=$ – értékadás (bal oldalon nem szerepelhet konstans)
  - $+, -$ – összeadás, kivonás ($a - b$ eredménye 0, ha $a < b$)
  - $\mathrm{JZ}\ r, \ell$ – ha $r == 0$, ugrás az ℓ. sorszámú utasításra
  - $\textsc{Halt}$, $\textsc{Accept}$, $\textsc{Reject}$ – megállás
- a programszámláló (PC) pozitív egész, 0-ról indul
  - a gép egy lépésben végrehajtja azt az utasítást, melynek sorszáma a PC tartalma
  - a feltételes ugrást kivéve minden lépés után eggyel nő a PC
  - ha nincs ilyen sorszámú utasítás, a számítás megáll

A RAM gép

- a számítás tetszőleges pillanatában csak véges sok regiszter értéke nem 0
- inicializálás:
  - az input az $I[1]$, $I[2]$, $\ldots$, $I[m]$ számsorozat, ahol $I[m+1]$ az első 0-t tartalmazó input regiszter
  - a többi regiszter tartalma 0
- az output
  - $\textsc{Accept}/\textsc{Reject}$ (vagy true/false, vagy $1/0$), ha a megállás egy $\textsc{Accept}/\textsc{Reject}$ utasítás végrehajtásakor következett be
  - az $O[1]$, $O[2]$, $\ldots$, $O[k]$ számsorozat, ahol $O[k+1]$ az első 0-t tartalmazó output regiszter, egyébként

Az M $\textsc{Ram}$ gép az $a_1, \ldots, a_m$ inputon számított outputját $\boldsymbol{M(a_1, \ldots, a_m)}$ jelöli; ha M nem áll meg ezen az inputon, annak jele $\boldsymbol{M(a_1, \ldots, a_m) = \nearrow}$.

0. JZ 0, 0

Feltételek, ugrások

if $L == R$ goto Y

1. $X := L + 1$
2. $X := X - R$
3. JZ $X, 6$
4. $X := X - 1$
5. JZ X, Y

ahol X egy másra nem használt munkaregiszter.
Feltétel nélküli ugrás, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ relációk szerinti feltételek hasonló módon

Stack memória, függvényhívások

Ha egy SP munkaregisztert (pl $W[0]$-t) kinevezünk **stack pointernek**, és függvényeinket mindig **rögzített paraméterszámmal** definiáljuk, akkor lokális változókat használó rekurzív (most: „önmagukat hívó") függvényeket is írhatunk a megszokott módon

- $W[\mathrm{SP}] := k$, ahol k az a programsor, ahová a függvényhívás után vissza kell térnünk
- SP egyesével növelése mellett a paramétereket sorban bemásoljuk $W[\mathrm{SP}]$-be
- ugrunk a függvény belépési pontjára
- a függvény a verem tetején megtalálja a paramétereit, a saját lokális változóit ezek tetejére hozza létre
- visszatéréskor a megfelelő értékkel (paraméterszám+lokális változók száma) csökkenti SP-t és a megfelelő, a veremben letárolt címre ugrik vissza

Heap memória is kell?

A munkaregiszterek kettéosztásával (pl. páratlan sorszámúak a stack, párosak a heap memóriához tartoznak) többféle memóriát is lehet kezelni

- kinevezünk egy regisztert heap counternek
- dinamikus memóriafoglalásnál visszaadjuk a heap counter értékét mint „címet” és megnöveljük a heap countert a foglalni kívánt mérettel
- memória-felszabadítás: nincs rá szükség

Strukturált programozás

while F do (R)

1. if $F == 0$ goto 4
2. R
3. goto 1

do (R) while F

1. R
2. if $F == 0$ goto 4
3. goto 1

for $i := 1 \ldots N$ do (R)

1. $i := 1$
2. while $i \leq N$ do (
3. R
4. $i := i + 1$)

Aritmetika

Legmagasabb bit $O(\log N)$ lépésben

function HIGH(N)
  if $N == 0$ **then return** 0
  $a := 1$
  while $a + a \leq N$ **do** $a := a + a$
  return a

Pl. $\textsc{High}(42) = 32$

Paritás $O(\log^2 N)$ lépésben

function ODD(N)
  $a := 0$
  while $a \neq N$ **do**
    $N := N - a$
    $a :=$HIGH(N)
  if $a == 1$ **then return** 1
  return 0

Pl.

$$42 \mapsto 42 - 32 = 10$$
$$10 \mapsto 10 - 8 = 2$$
$$2 \mapsto 2 - 2 = 0$$

return 0

Felezés $O(\log N)$ lépésben

```
function HALF(N)
    r := 0
    while N > 1 do
        a := 1
        while a + a + a + a ≤ N do
            a := a + a
        N := N − a − a
        r := r + a
    return r
```

Pl. HALF(45)

N	a	r
45	1	0
45	2	0
45	4	0
45	8	0
45	16	0
13	1	16
13	2	16
13	4	16
5	1	20
5	2	20
1	1	22

return 22

Aritmetika

Szorzás $O(\log^3 b)$ lépésben

```
function MULT(a,b)
    r := 0
    while b > 0 do
        if ODD(b) then r := r + a
        b := HALF(b)
        a := a + a
    return r
```

Pl. $\textsc{Mult}(15, 11)$

a	b	r
15	11	0
30	5	15
60	2	45
120	1	45
240	0	165

return 165

Szorzás rekurzívan

```
function MULT(a,b)
    if b == 0 then
        return 0
    if ODD(b) then
        return MULT(a + a,b/2)+a
    return MULT(a + a,b/2)
```

Szorzás tail rekurzívan

```
function MULT(a,b,r)
    if b == 0 then
        return r
    if ODD(b) then
        return MULT(a + a,b/2,r + a)
    return MULT(a + a,b/2,r)
```

Aritmetika

Duplázás / shift left konstans sok lépésben

$$R[i] \;:=\; R[i] + R[i]$$

2^k előállítása

Inicializálás 1-gyel, majd k darab shift left – $\Theta(k)$ lépés (!)

Az $\{1, \ldots, k\}$ halmaz részhalmazaival végzett műveletek

- k darab regiszterben, mindegyikben 0 vagy 1 a karakterisztikus függvénynek megfelelően
- elem beszúrása, törlése, lekérdezése konstans időben

Problémák eldöntése

Definíció

Eldöntési problémán egy tetszőleges $L \subseteq \mathbb{N}^*$ halmazt értünk (azaz számsorozatok egy halmazát).

Definíció

Az M RAM-gép **eldönti** az L problémát, ha tetszőleges $I = a_1, \ldots, a_m$ inputra

$$M(I) = \begin{cases} \text{ACCEPT} & \text{, ha } I \in L; \\ \text{REJECT} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Definíció

Az L probléma **eldönthető**, ha van őt eldöntő RAM-gép.

Definíció

$\mathbf{R}$ jelöli az összes eldönthető probléma osztályát.

Az input mérete és a futásidő

Futásidő egy adott inputon: lépésszám

Az M RAM gép **időigénye az $a_1, \ldots, a_m$ inputon** a megállásig végrehajtott utasítások száma, ha M megáll $a_1, \ldots, a_m$-en; egyébként a gép nem áll meg és időigénye végtelen

Az input mérete

Az $a_1, \ldots, a_m$ input **mérete** az a_i számok **bináris reprezentációinak** hosszának összege (azaz $\sum_{i=1}^{m}(1 + \lfloor \log a_i \rfloor)$).

Általában n jelöli az input hosszát.

A gép időkorlátja

Az M RAM gép **időkorlátja** az $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, ha tetszőleges n méretű inputon legfeljebb $f(n)$ lépésben megáll.

A $\mathbf{P}$ osztály

Definíció

$\mathbf{P}$ jelöli az összes **polinomidőben eldönthető** probléma osztályát, azaz melyek eldönthetőek $\mathcal{O}(n^k)$ időkorlátos RAM-géppel, valamely konstans k-ra.

Megjegyzés

Ha RAM-gép helyett Turing-géppel definiálnánk az $\mathbf{R}$ és a $\mathbf{P}$ osztályokat, akkor is ugyanezeket az osztályokat kapnánk: **a bonyolultságelmélet független a választott architektúrától.**
(Mindaddig, amíg az architektúra realisztikus.)

Megjegyzés

A továbbiakban problémáink inputjainak nem csak számsorozatokat, de gráfokat és egyéb véges matematikai struktúrákat is megengedünk; ez nem gond, mert minden ilyen struktúra kódolható számsorozattal.

Polinom időben eldönthető problémák

Elérhetőség

- Adott: egy $G = (V, E)$ irányított gráf.
  Feltehetjük, hogy $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Kérdés: létezik-e 1-ből n-be vezető irányított út?
- Módszer:
  1. $S := \{1\}$.
  2. Jelöljük meg az 1 csúcsot.
  3. Amíg S nem üres:
     1. Választunk egy $i \in S$ csúcsot.
     2. $S := S - \{i\}$.
     3. $j = 1..n$:
        Ha $(i, j) \in E$ és j nem megjelölt,
        akkor $S := S \cup \{j\}$ és jelöljük meg j-t.
- Ha n megjelölt csúcs, adjunk Accept választ,
  különben adjunk Reject választ.

Polinom időben eldönthető problémák

Néhány kimaradt részlet

- A bemenet megadása – pl. szomszédsági mátrix
  (Függ a modelltől, de lényeges szerepet nem játszik.)
- S reprezentálása
  - sor: szélességi keresés
  - verem: egyfajta mélységi keresés

Hatékonyság

- A mátrix minden elemét legfeljebb egyszer használjuk fel.
- Ha az egyszerű műveletek (S egy elemének kiválasztása, megjelölése, stb.) konstans időigényűek, akkor $\mathcal{O}(n^2)$.

Függvényproblémák

Függvényprobléma egy tetszőleges $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ leképezés.

Az M RAM-gép az f függvényproblémát **számítja ki**, ha $M(I) = f(I)$ tetszőleges I inputra.

Az f függvényprobléma **rekurzív**, ha van őt kiszámító RAM-gép.

Megjegyzés

Mint korábban, a rekurzív függvények osztálya sem változik, ha RAM-gép helyett (például) a Turing-gép lenne a választott architektúra.

Az utazóügynök probléma

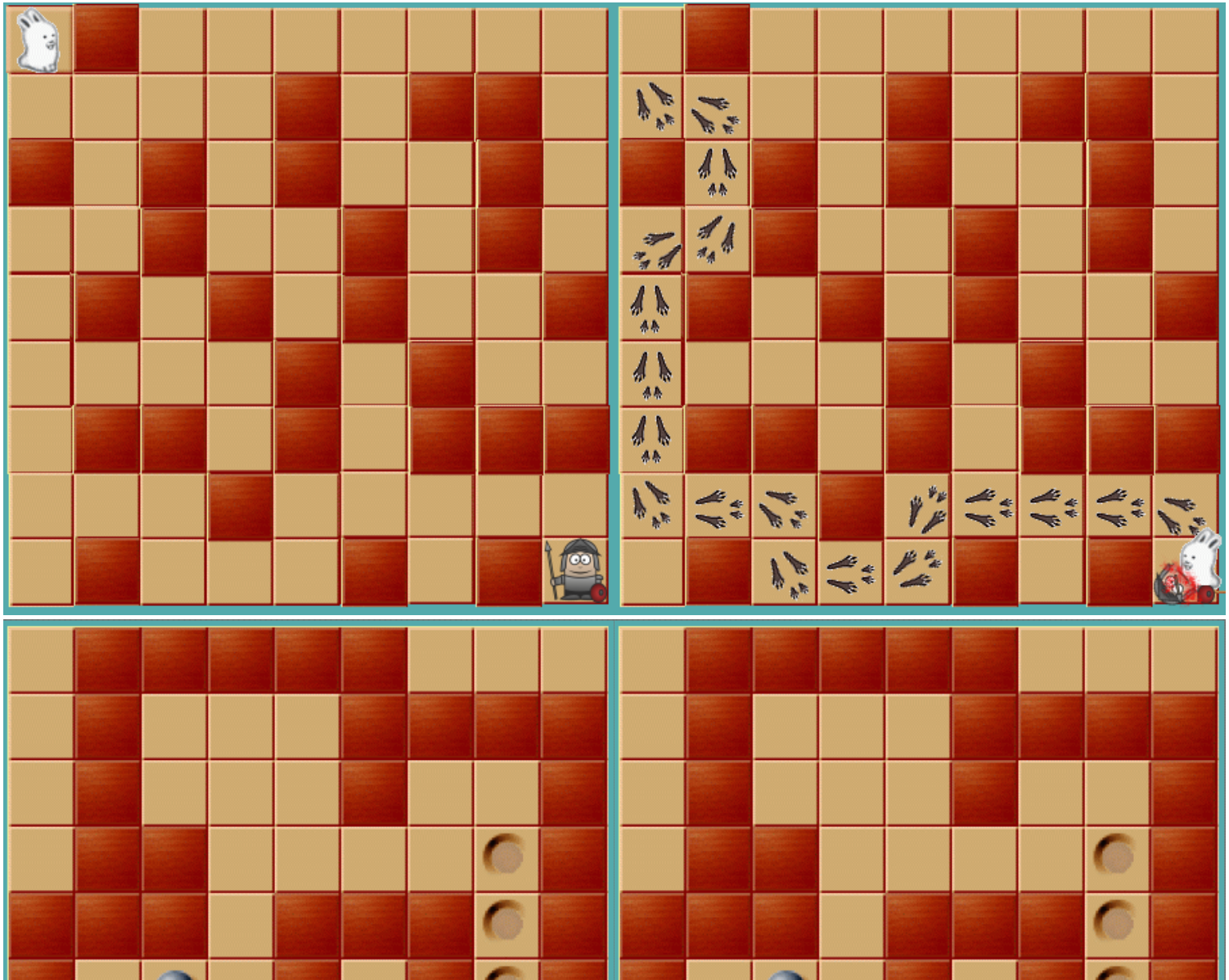
TSP

- **Adott**: az $1, 2, \ldots, n$ városok és bármely két i, j város távolsága: $d_{i,j}$.
- **Kérdés**: találjunk egy, az összes várost pontosan egyszer érintő legrövidebb körutat.
  Eldöntési változata: $\mathbf{TSP(E)}$.
- **Triviális módszer**: az összes $\frac{(n-1)!}{2}$ lehetséges körút megvizsgálásával.
- **Dinamikus programozással**: $\mathcal{O}(2^n \cdot n^2)$ időigény

Nem ismert, hogy TSP megoldható-e polinom idejű algoritmussal.
(**NP**-teljes probléma.)

Melyik a nehezebb?

Maze vs Sokoban



Turing-visszavezetések

Legyenek A és B eldöntési problémák.
B legalább olyan nehéz, mint A, ha létezik olyan hatékony módszer, azaz **f rekurzív függvény**, mely az A tetszőleges x bemenetéhez hozzárendeli a B egy $f(x)$ bemenetét (példányát) úgy, hogy az A-nak x akkor és csak akkor „igen" példánya, ha B-nek $f(x)$ „igen" példánya.
Jelben: $A \leq_R B$, A **Turing-visszavezethető** (vagy rekurzívan visszavezethető) B-re.
Ekkor:

- ha van egy B-t eldöntő algoritmusunk, akkor A-ra is van:

  function A(x)
  return B($f(x)$);

- így tehát **ha $A \leq_R B$ és A-ról tudjuk, hogy eldönthetetlen, akkor B is az kell legyen.**

Hatékony visszavezetés

Az f függvényre további megszorításokat teszünk.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az A probléma (polinomidőben) **visszavezethető** a B problémára, ha létezik olyan **polinomidőben kiszámítható** f függvény, hogy minden x bemenetre

$$\boldsymbol{x \in A \;\Leftrightarrow\; f(x) \in B.}$$

Jelben: $A \leq_{\mathcal{P}} B$.

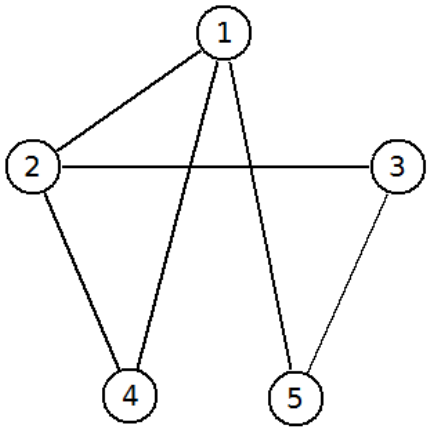
Hamilton-út $\leq_{\mathcal{P}}$ Tsp(E)

Hamilton-út

- Input: G irányítatlan gráf.
- Output: van-e G-ben Hamilton-út (minden csúcsot pontosan egyszer érintő út)?

Példa

Hamilton-út visszavezethető Tsp(E)-re.

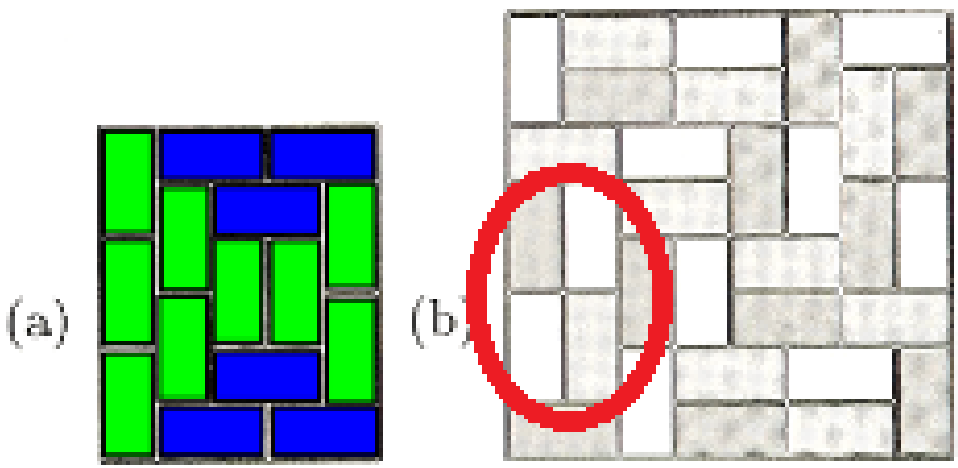


d	1	2	3	4	5
1	0	1	2	1	1
2	1	0	1	1	2
3	2	1	0	2	1
4	1	1	2	0	2
5	1	2	1	2	0

Tehát: $d_{i,j} = 1$, ha (i, j) él volt G-ben, 2 egyébként; a célérték $N+1$, ahol N a városok száma. Ekkor ha van Hamilton-út G-ben, annak összköltsége $N - 1$; a két végpontját összekötve (ennek súlya 1 vagy 2) egy legfeljebb $N + 1$ súlyú körutunk van. Másfelől, ha

Tatami $\leq_{\mathcal{P}}$ Sat

- Adott egy $n \times m$-es téglalap, melyet 2×1-es dominókkal (forgatni ér) szeretnénk lefedni.
- A lefedésnek hogy „szép” legyen, **tatami** lefedésnek kell lennie: négy dominó nem találkozhat egy sarkon.
- Néhány dominó előre fel van rakva a táblára.
- Adjunk meg egy tatami lefedését a táblának, melyben a megadott dominók a megadott módon szerepelnek!
- Eldöntési változat: **létezik-e** ilyen lefedés?



source: https://canadam.math.ca/2013/slides/Erickson.Alejandro.Tatami.pdf

Tatami $\leq_{\mathcal{P}}$ Sat

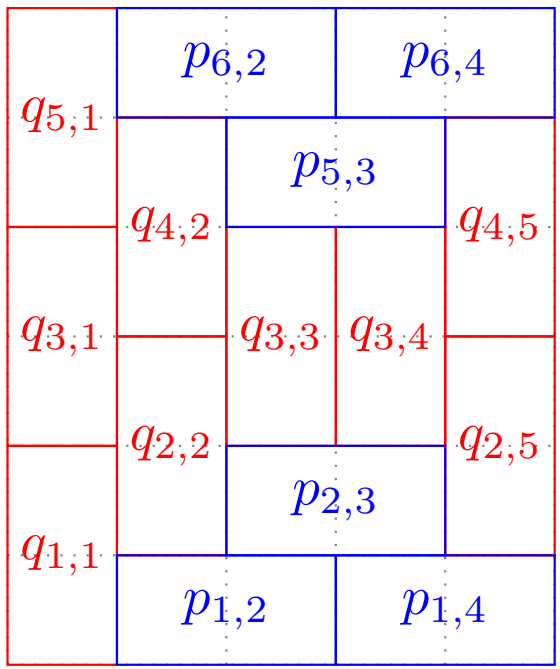
A táblán minden **szomszédos mezőket összekötő élhez** rendelünk egy változót, pl.

- $p_{i,j}$ legyen az i. sor j. oszlopából jobbra menő él,
- $q_{i,j}$ pedig a felfele menő él,

amilyen i, j-kre ilyen élek vannak. Pl. egy 6×5-ös táblán:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & p_{6,1} & p_{6,2} & p_{6,3} & p_{6,4} \\
q_{5,1} & q_{5,2} & q_{5,3} & q_{5,4} & q_{5,5} \\
 & p_{5,1} & p_{5,2} & p_{5,3} & p_{5,4} \\
q_{4,1} & q_{4,2} & q_{4,3} & q_{4,4} & q_{4,5} \\
 & p_{4,1} & p_{4,2} & p_{4,3} & p_{4,4} \\
q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} & q_{3,4} & q_{3,5} \\
 & p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & p_{3,4} \\
q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} & q_{2,4} & q_{2,5} \\
 & p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \\
q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} & q_{1,4} & q_{1,5} \\
 & p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4}
\end{array}
$$

Az elképzelés: azokat a változókat (éleket) állítsuk 1-re, amiket egy dominó fed le.



Tatami $\leq_{\mathcal{P}}$ Sat

Azt kell megfogalmaznunk, hogy mikor felel meg egy **értékadás** egy megoldásnak, vagyis egy **tatami lefedésnek**.

- Minden **mezőt** lefed legalább egy dominó: vagyoljuk a rá illeszkedő éleket
- Minden mezőt legfeljebb egy dominó fed: az egy mezőre illeszkedő éleket **nand** kapcsolatba hozzuk: $\neg(x \wedge y)$, azaz $(\neg x \vee \neg y)$
- A tatami feltétel: minden „sarok mellett" van igaz változó – ezeket is vagyoljuk

A fenti feltételeket pedig összeéseljük. Részlet:

- $(p_{4,2} \vee q_{4,2} \vee p_{4,1} \vee q_{3,2})$ – a $4.$ sor $2.$ mezőjét fedi egy dominó;
- $\neg p_{4,2} \vee \neg q_{4,2})$ – ezt a mezőt nem fedi egyszerre fentről és jobbról egy dominó;
- $(p_{3,1} \vee q_{2,1} \vee p_{2,1} \vee q_{2,2})$ – a 2. sor 1. oszlop sarkán nem érintkezik négy sarok

Plusz: az előre megadott dominóknak megfelelő változókat 1-re állítjuk

Párosítás $\leq_{\mathcal{P}}$ Sat

Párosítás

- Input: $G = (V, E)$ páros gráf.
- Output: van-e G-ben teljes párosítás?

Sat

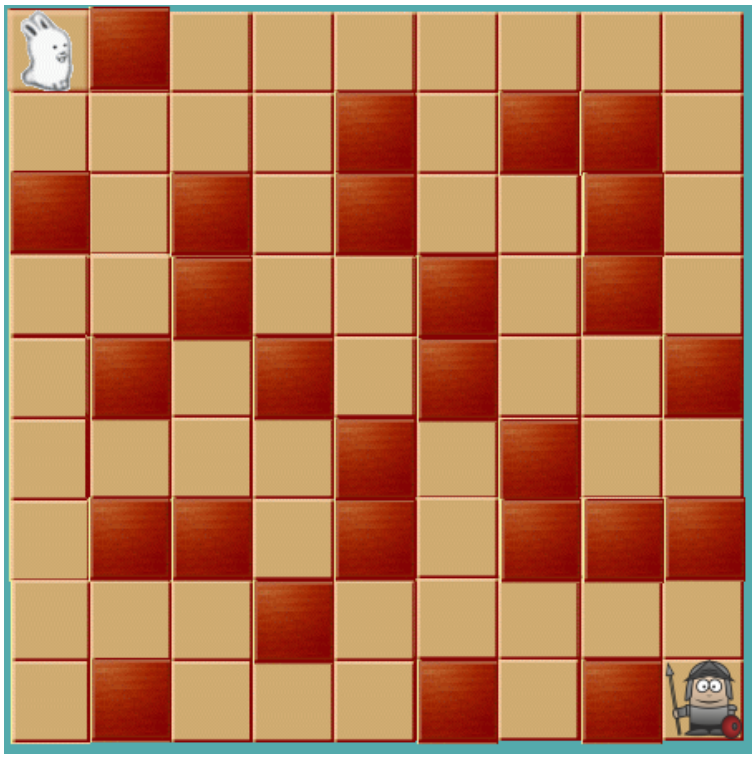
- Input: konjunktív normálformájú (ítéletkalkulus-beli) formula.
- Output: kielégíthető-e?

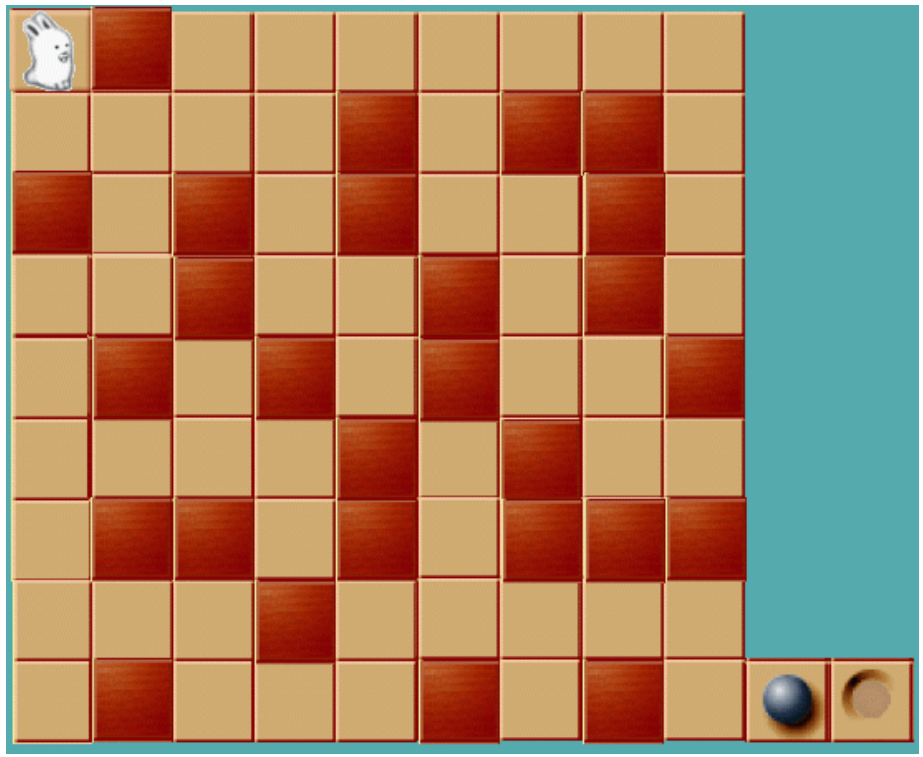
A visszavezetés

Gyakorlaton.

Visszatérve...

Maze $\leq_{\mathcal{P}}$ Sokoban





Jobb alsó sarok mellé rakni az egyetlen ládát, amellé a lyukat.

Nem ismert, hogy Sokoban $\leq_{\mathcal{P}}$ Maze (mely esetben „egyforma nehezek") vagy sem.

Univerzális RAM-gép

Dacára egyszerű szintaxisának, a RAM-gép is **Turing-teljes** számítási modell: minden „hagyományos” programozási nyelven megvalósítható algoritmusra létezik RAM program is.

Így például RAM interpretert is írhatunk RAM nyelven...

Tétel

Létezik olyan U **univerzális RAM-program**, amelynek ha adott egy M RAM-program és annak egy x bemenete, úgy viselkedik, mint M az x-en, vagyis $U(M; x) = M(x)$.

Természetesen M kódolva adott U számára (utasítások, tömbcímzések... számokkal).

A megállási probléma – első eldönthetetlen problémánk

Megállás

- Input: M program, x input.
- Output: Megáll-e M az x-en futtatva?

Tétel

A Megállás probléma eldönthetetlen.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy Megállás eldönthető egy M_0 programmal.
Legyen D a következő (Ram-programot váró) program:

$$D(M) = \textbf{if } M_0(M;M) \textbf{ then } \nearrow \textbf{ else halt}.$$

Ekkor:

$$D(D) = \nearrow \Leftrightarrow \; M_0(D;D) = \text{„igen"} \; \Leftrightarrow \; D(D) \neq \nearrow,$$

ami ellentmondás.

Visszavezetés: eldönthetetlenség bizonyítása

Ha már ismerünk egy eldönthetetlen problémát, másokról is meg tudjuk mutatni, hogy eldönthetetlenek.

Hogyan?

Azt használjuk fel, hogy ha

- A eldönthetetlen és
- $A \leq_{\mathcal{R}} B$,

akkor B is eldönthetetlen.

Mindenen Megállás

Állítás

Az alábbi probléma algoritmikusan eldönthetetlen.

- **Adott:** M Ram-program.
- **Kérdés:** M megáll-e minden bemenetén?

Bizonyítás

Adott M és x esetén legyen M_x olyan program, hogy az M_x minden y inputjára:

$$M_x(y) \;=\; M(x).$$

(azaz: M_x tetszőleges y input esetén futtassa M-et x-en.)
Így

$$M(x) \neq \nearrow \Leftrightarrow \; M_x \text{ megáll minden bemenetén.}$$

Ez az $M; x \mapsto M_x$ hozzárendelés kiszámítható, tehát rekurzív visszavezetés; és mivel az eldönthetetlen Megállás problémá**t** visszavezettük erre a problémá**ra**, ez is eldönthetetlen.

Üres Inputon Megállás

Legyen Üres Inputon Megállás a következő probléma:

- Input: egy M program.
- Output: megáll-e M az üres inputon (azaz mikor minden input regisztert 0-val inicializálunk)?

Eldönthetetlen!

Visszavezetjük rá a Megállás problémát.
Adott M-hez és x-hez legyen M_x az a program, ami tetszőleges y inputra

- ha y az üres input, akkor futtatja M-et x-en;
- egyébként mondjuk megáll.

Ez az M_x az $M; x$ párból elkészíthető és nyilván

$$M \text{ megáll } x\text{-en} \Leftrightarrow M_x \text{ megáll üres inputon.}$$

Tehát Megállás $\leq_{\mathcal{R}}$ Üres Inputon Megállás, így ez utóbbi is eldönthetetlen probléma.

Mit láttunk eddig?

A Megállás, Mindenen Megállás és Üresszón Megállás problémák eldönthetetlensége szerint...

- **nincs** olyan algoritmus, mely inputként kap egy **Java forráskódot** és hozzá egy **inputot**, és megválaszolja, hogy a megadott program megáll-e a megadott inputon;
- **nincs** olyan algoritmus, mely inputként kap egy forráskódot és megválaszolja, hogy a program eshet-e végtelen ciklusba egyáltalán, vagy akár csak azt, hogy paraméter nélkül elindítva végtelen ciklusba fog-e esni!

A helyzet azonban ennél sokkal rosszabb...

Rekurzív felsorolhatóság

Definíció

Egy A probléma **rekurzívan felsorolható** (vagy Turing-felismerhető), ha van olyan M RAM-program, amire

$$M(x) = \begin{cases} \text{ACCEPT} & \text{, ha } x \in A \\ \nearrow & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

A rekurzívan felsorolható problémák osztályát $\mathbf{RE}$ jelöli.

Nyilván $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{RE}$. (Hiszen egy RAM programot ACCEPT-től különböző válasz **helyett** végtelen ciklusba egyszerű küldeni.)

Rekurzív felsorolhatóság

Tétel

$$\mathbf{R} \subsetneq \mathbf{RE}.$$

Bizonyítás

Az eldönthetetlen MEGÁLLÁS probléma rekurzívan felsorolható, pl. azzal a RAM-programmal, mely futtatja az univerzális RAM-programot az input $M; x$ páron, majd ha az megáll, ACCEPT választ ad.

A „rosszabb helyzet”: Rice tétele

Rice tétele

A rekurzívan felsorolható problémák egyetlen nemtriviális tulajdonsága sem dönthető el algoritmikusan.

Vagyis: ha $\emptyset \neq \mathcal{C} \subsetneq \mathbf{RE}$ a rekurzívan felsorolható problémák egy nemtriviális osztálya, akkor a következő probléma eldönthetetlen: adott egy M program, igaz-e, hogy $L(M) \in \mathcal{C}$?

Másképp mondva: automatikusan **semmi nemtriviálisat** nem tudunk eldönteni egy program **viselkedéséről** a **forráskódjának** ismeretében.

Ezért válnak szükségessé például kommentek, tervezési minták használáta, statikus és dinamikus tesztelés...

További eldönthetetlen problémák

Hilbert 10. problémája

- **Adott:** $p(x_1, \ldots, x_n)$ egész együtthatós polinom.
- **Kérdés:** Létezik-e egész értékű zérushelye?

Tétel (Matijasevič)

Hilbert 10. problémája algoritmikusan megoldhatatlan.

Post megfelelkezési problémája

- **Adott:** $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n \in \Sigma^*$.
- **Kérdés:** Létezik-e olyan $i_1, \ldots, i_k$ $(k > 0,\ 1 \leq i_j \leq n)$ sorozat, hogy
$$u_{i_1} \ldots u_{i_k} = v_{i_1} \ldots v_{i_k} \ ?$$

Tétel (Post)

A fenti probléma algoritmikusan megoldhatatlan.

Post megfelelkezési problémája

Példa

PI: $\binom{0}{100}$, $\binom{01}{00}$, $\binom{110}{11}$-nek van:

$$\binom{110}{11}\binom{01}{00}\binom{110}{11}\binom{0}{100}$$

Egy dominó probléma

- **Adott:** Dominó típusok véges halmaza.
- **Kérdés:** Kirakható-e ezekkel a dominókkal az egész sík hézagmentesen?

Típus: $\boxed{\begin{array}{ccc} & u_1 & \\ u_2 & & u_3 \\ & u_4 & \end{array}}$, $u_i \in \Sigma^*$.

A dominók nem forgathatóak.

Tétel

A dominó probléma algoritmikusan megoldhatatlan.

Egy megoldatlan probléma

- **Adott:** m pozitív egész szám.
- **Kérdés: Kongruens**-e m?

Tehát azt kérdezzük, hogy létezik-e olyan derékszögű háromszög, mely oldalai racionális hosszúságúak és melynek területe m.

Példa

1, 2, 3, 4 **nem** kongruensek. 5 kongruens (Fibonacci):

$$a = \frac{3}{2},\ b = \frac{20}{3},\ c = \frac{41}{6}$$

Nem ismert, hogy a probléma algoritmikusan eldönthető-e.

Állítás

Ha A rekurzív, akkor $\overline{A}$ is az.

Ötlet

Az Accept és a Reject sorok cseréjével.

Állítás

Egy A probléma pontosan akkor rekurzív, ha A és $\overline{A}$ rekurzívan felsorolhatók.

Ötlet

- A rekurzív $\Rightarrow$ A rekurzívan felsorolható
  A rekurzív $\Rightarrow$ $\overline{A}$ rekurzív, így $\overline{A}$ rekurzívan felsorolható
- Tegyük fel, hogy A és $\overline{A}$ rekurzívan felsorolhatók. Ekkor A felismerhető egy M, $\overline{A}$ pedig egy $\overline{M}$ programmal. Szimuláljuk M-et és $\overline{M}$-et párhuzamosan!

co$\mathcal{C}$

Definíció

Legyen $\mathcal{C}$ problémák egy osztálya. Ekkor

$$\text{co}\mathcal{C} \;=\; \{\overline{L} : L \in \mathcal{C}\}.$$

Példák

- co$\mathbf{R}$: azon problémák, melyek komplementere rekurzív
- co$\mathbf{RE}$: azon problémák, melyek komplementere rekurzívan felsorolható

$\mathbf{R}$, $\mathbf{RE}$ és co$\mathbf{RE}$ viszonya

Következmény

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \text{co}\mathbf{R} \\ \mathbf{RE} &\neq \text{co}\mathbf{RE} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{RE} \cap \text{co}\mathbf{RE} \end{aligned}$$

Nemdeterminizmus

Láttunk rá bizonyítékot, hogy minden „realisztikus” számítási modell szimulálható RAM-gépen, lényegi időigény-romlás nélkül.

Most bevezetünk egy nemrealisztikus számítási modellt.

Egy **nemdeterminisztikus** RAM-programban

- több különböző programsor is kaphatja **ugyanazt a sorszámot**
- egy **lehetséges futás** minden lépésében a PC által kijelölt sorszámú lehetséges utasítások **egyike** hajtódik végre
- (utána a PC eggyel nő vagy ugrás esetén a megfelelő értékre áll be)

A program **elfogadja** az inputot, ha **van olyan** lehetséges futás, mely ACCEPT utasítással terminál, egyébként **elutasítja** azt

`https://www.youtube.com/watch?v=lufECeWtN34`

Nemdeterminisztikus generálás

Egy bit

1. $a := 0$
1. $a := 1$
2. ...

Egy n-bites szám

function ND(n)
1. $r := 0$
2. if $n == 0$ **return** r
3. $r := r + r$
4. $\boldsymbol{r := r + 1}$
4. $\boldsymbol{r := r + 0}$
5. $n := n - 1$
6. goto 2

Példa: Hamilton-Út

- **Input**: $\vec{G} = (V, E)$ (irányított) gráf. Feltehető, hogy $V = \{1, \ldots, n\}$.
- **Output**: Van-e $\vec{G}$-ben Hamilton-út (azaz minden csúcsot érintő út)?

for $i := 1 \ldots n$ **do**
    $W[i] :=$ND$(1 + \lfloor \log n \rfloor)$
for $i := 1 \ldots n - 1$ **do**
    if $(W[i], W[i+1]) \notin E$ **then** Reject
for $i := 1 \ldots n$ **do**
    for $j := 1 \ldots n$ **do**
        if $W[j] == i$ **then** break
    if $j > n$ **then** Reject
Accept

Nemdeterminisztikus időigény

Egy nemdeterminisztikus program **időigénye** $f(n)$, ha bármely n méretű inputon **tetszőleges** lehetséges futás $f(n)$ lépésben véget ér.

Hamilton-út időigénye

Az előző fólia algoritmusának időigénye például **négyzetes**:

- nemdeterminisztikusan generál n darab, egyenként $\approx \log n$-bites számot, ez $n \log n$ lépés;
- (determinisztikusan) ellenőrzi, hogy az n szám ebben a sorrendben valóban egy séta-e a gráfban, ez n lépés;
- (determinisztikusan) ellenőrzi, hogy minden csúcs előfordul-e a sétában, ez n^2 lépés.

Megjegyzés

Az utolsó ellenőrzés hatékonyabban is elvégezhető, most a pszeudokód egyszerűségét tartottuk szem előtt.

Példa: SAT

- **Input:** konjunktív normálformájú formula
- **Output:** kielégíthető-e?

Algoritmus

- minden változónak nemdeterminisztikusan beállítjuk az értékét 1-re vagy 0-ra (lineáris időigény);
- determinisztikusan ellenőrizzük, hogy a kapott kiértékelés kielégítő-e (lineáris időigény);
- ha igen, ACCEPT, egyébként REJECT választ adunk.

Példa: 3 – Színezés

- **Input:** $G = (V, E)$ (irányítatlan) gráf.
- **Output:** kiszínezhető-e G **helyesen**, vagyis adhatunk-e minden csúcsnak egy-egy színt egy háromelemű színhalmazból, hogy szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak?

Algoritmus

- minden csúcsnak nemdeterminisztikusan adunk egy színt az $\{R, G, B\}$ halmazból;
- determinisztikusan ellenőrizzük, hogy a kapott színezés helyes-e;
- ha igen, Accept, egyébként Reject választ adunk.

Az **NP** osztály

Az **NP** osztályba mindazok a problémák tartoznak, melyek eldönthetők **polinom időigényű nemdeterminisztikus programmal**.

Azaz, $L \in \mathbf{NP}$, ha van olyan M polinom időkorlátos nemdeterminisztikus program, melyre

- ha $x \in L$, akkor M-nek **létezik** elfogadó futása x-en, és
- ha $x \notin L$, akkor M-nek minden futása elutasítja x-et.

Példa

Hamilton-Út, Sat és $3-$Színezés **NP**-beli problémák.

Mivel minden $f(n)$ időigényű program felfogható $f(n)$ időigényű nemdeterminisztikus programként is, így nyilván $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$.

Polinomidőben verifikálhatóság

Az előző példákban az algoritmusok mind a következő sémára épültek fel:

- nemdeterminisztikusan generáltak valami „bizonyítékot” arra, hogy az input a problémának egy IGEN példánya, majd
- determinisztikusan ellenőrizték, hogy tényleg jó bizonyítékot sikerült-e generálni.

Ez a séma **pontosan karakterizálja az NP osztályt**!

Polinomidőben verifikálhatóság

Tétel

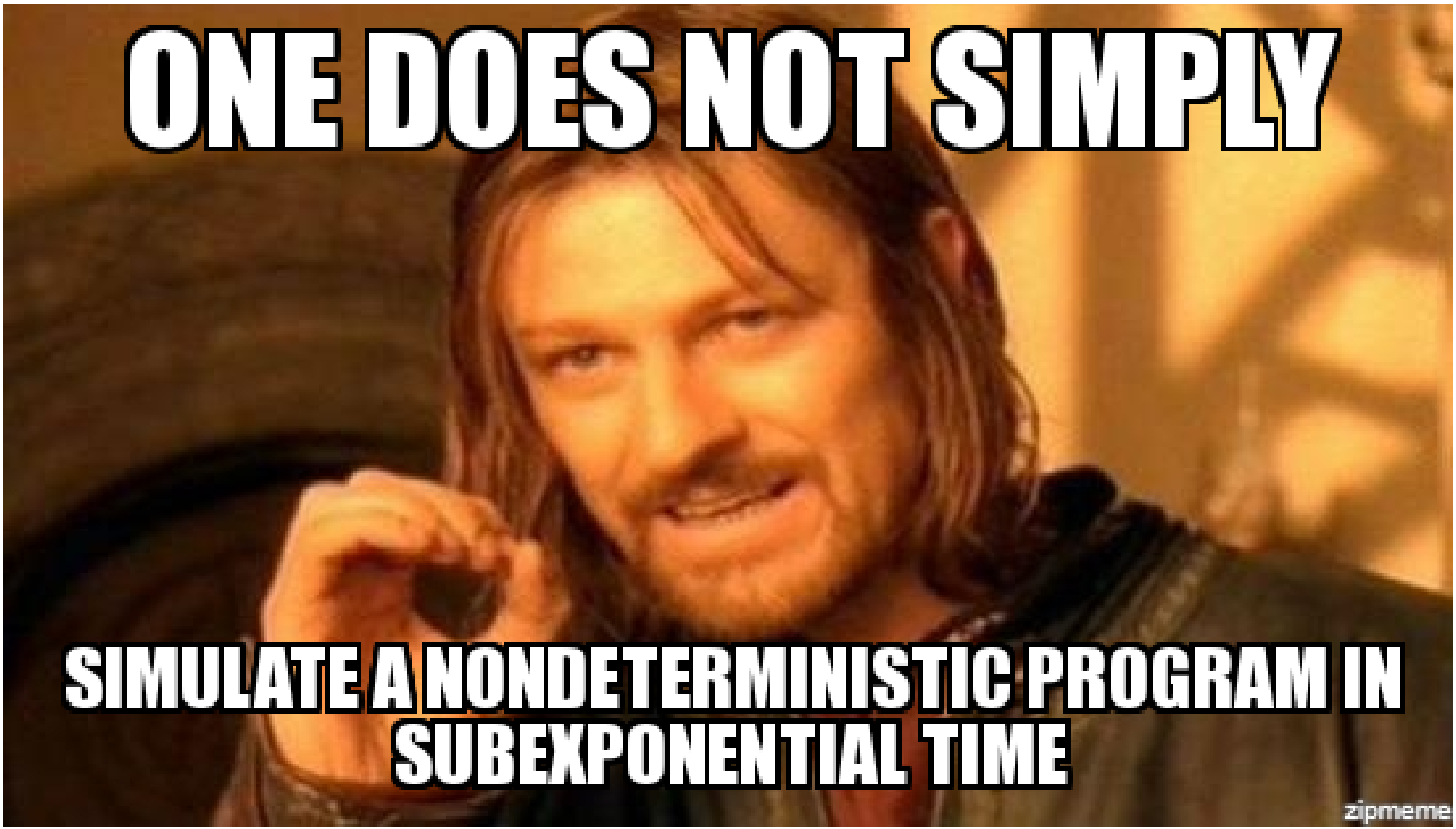
Egy L probléma pontosan akkor van az $\mathbf{NP}$ osztályban, ha létezik egy olyan $K \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ reláció „inputok" és „tanúk" közt, melyre a következők fennállnak:

- létezik olyan k konstans, melyre ha $(x, y) \in K$, akkor $|y| \leq |x|^k$ (azaz az egyes inputokhoz tartozó tanúk „rövidek");
- K polinom időben eldönthető (azaz van hatékony algoritmus, mely az x, y párra eldönti, hogy y az x-hez tartozó tanú-e);
- $x \in L$ pontosan akkor, ha $\exists y : \ (x, y) \in K$ (azok az inputok a probléma IGEN példányai, melyekre van tanú).

A HAMILTON-ÚT problémánál egy gráfhoz tartozó tanú pl. maga egy Hamilton-út: lineáris méretű és könnyű **ellenőrizni**, hogy tényleg Hamilton-út vagy sem, és – nyilván – pontosan az IGEN példányokra van ilyen tanú.

Hatékonyság

Hatékonyak ezek a „polinomidejű” algoritmusok?



Nehézség, teljesség

Legyen $\mathcal{C}$ (eldöntési) problémák egy osztálya.

- Az A probléma **$\mathcal{C}$-nehéz**, ha $\mathcal{C}$ **minden** eleme visszavezethető rá.
- Ha még $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$ is, akkor A **$\mathcal{C}$-teljes**.

Észrevétel

Ha egy $\mathbf{NP}$-teljes probléma polinomidőben eldönthető, akkor (és csak akkor) $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
(Hiszen akkor $\mathbf{NP}$ bármelyik problémája eldönthető egy polinomidejű visszavezetés és egy, a fenti problémát eldöntő polinomidejű algoritmus kompozíciójával, tehát polinomidőben.)

$\mathcal{C}$-nehéz problémák keresése

Észrevétel

A hatékony visszavezetés tranzitív.

Ezért hogy megmutassuk egy A probléma $\mathcal{C}$-nehézségét, mindössze vissza kell rá vezetnünk egy másik, ismerten $\mathcal{C}$-nehéz B problémát. Hisz ekkor

- minden $\mathcal{C}$-beli visszavezethető B-re,
- B visszavezethető A-ra,

ezért (tranzitivitás!) minden $\mathcal{C}$-beli is visszavezethető A-ra.

Csakhogy...

...az **első** $\mathcal{C}$-nehéz problémát hogy kapjuk?

Visszavezetésre való zártság

Definíció

Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{C}$ bonyolultsági osztály **zárt a visszavezetésre**, ha valahányszor $A \leq_{\mathcal{P}} B$ és $B \in \mathcal{C}$, mindig teljesül $A \in \mathcal{C}$ is.

Állítás

Az eddig látott bonyolultsági osztályok ($\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{RE}$) zártak a visszavezetésre.

Ha $\mathcal{C}$ zárt a visszavezetésre és A egy $\mathcal{C}$-teljes probléma, akkor $\mathcal{C}$-ben pontosan az A-ra visszavezethető problémák vannak ($\mathcal{C} = \{B : B \leq_{\mathcal{P}} A\}$). Tehát A reprezentálja az egész osztályt!

Megjegyzés

$\mathbf{P}$ bármely két nemtriviális A, B elemére igaz, hogy $A \leq_{\mathcal{P}} B$.

Első **RE**-teljes problémánk

MEGÁLLÁS **RE**-teljes.

Legyen $\mathrm{A} \in \mathbf{RE}$ egy tetszőleges probléma, amit felismer az M RAM-program. Akkor tetszőleges x inputra

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; (M; x) \in \text{MEGÁLLÁS},$$

hiszen ha M az A problémát ismeri fel, akkor pontosan az IGEN példányain áll meg (ACCEPT választ adva), így az $x \mapsto (M; x)$ leképezés egy (hatékony) visszavezetése A-nak a MEGÁLLÁS problémára.

Így ha $\text{MEGÁLLÁS} \leq \mathrm{A}$ valamely A problémára, akkor A is **RE**-nehéz:

- MINDENEN MEGÁLLÁS
- ÜRES INPUTON MEGÁLLÁS
- EKVIVALENCIA
- ...

$\mathbf{RE}$-n kívül

Ha $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ zártak a visszavezetésre, A pedig egy $\mathcal{C}$-nehéz és $\mathcal{C}'$-beli probléma, akkor $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.

Láttuk, hogy $\overline{\textsc{Megállás}} \leq \textsc{Ekvivalencia}$.
Az is igaz, hogy $\overline{\textsc{Megállás}} \leq \textsc{Ekvivalencia}$, tehát $\textsc{Ekvivalencia}$ $\mathbf{RE}$-nehéz **és** $\mathrm{co}\mathbf{RE}$-nehéz is egyszerre.
Mivel $\mathbf{RE} \neq \mathrm{co}\mathbf{RE}$ (emiatt persze egyikük sem lehet része a másiknak, hisz ha pl. $\mathbf{RE} \subseteq \mathrm{co}\mathbf{RE}$, akkor $\mathrm{co}\mathbf{RE} \subseteq \mathrm{coco}\mathbf{RE} = \mathbf{RE}$, mely esetben egyenlőek), ez azt jelenti, hogy $\textsc{Ekvivalencia}$ **nem $\mathbf{RE} \cup \mathbf{coRE}$-beli probléma**!
Azaz sem olyan algoritmus nincs, mely felismeri, ha két program ekvivalens, sem olyan, mely felismeri, ha két program nem ekvivalens.

Logikai hálózatok

Definíció

Hálózat: körmentes irányított gráf,
a csúcsok címkézettek: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, igaz, hamis, x_i
$\wedge$, $\vee$ címke esetén a csúcs befoka 2,
$\neg$ címke esetén a csúcs befoka 1,
igaz, hamis, x_i címke esetén a csúcs befoka 0.

Általában megköveteljük még, hogy pontosan egy csúcs kifoka legyen 0.

Amennyiben a változók közül az $x_1, \ldots, x_n$ fordulnak elő a hálózatban (legfeljebb), akkor a hálózat kiszámít egy $\{\mathrm{igaz}, \mathrm{hamis}\}^n \to \{\mathrm{igaz}, \mathrm{hamis}\}$ Boole-függvényt.

Hálózat-Kiértékelés

- **Adott:** változómentes hálózat.
- **Kérdés:** igaz-e az értéke?

Hálózat-Kielégíthetőség

- **Adott:** hálózat.
- **Kérdés:** a változóknak lehet-e úgy értéket adni, hogy a hálózat értéke igaz legyen?

Sat

- **Adott:** egy konjunktív normálformájú (ítéletkalkulus-beli) formula.
- **Kérdés:** kielégíthető-e?

Állítás

$$\textsc{Hálózat-Kielégíthetőség} \leq_{\mathcal{P}} \textsc{Sat}.$$

A visszavezetés

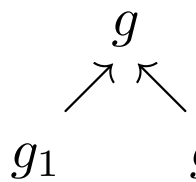
Minden g csúcsnak feleljen meg a g változó.

g címkéje x $\mapsto$ $x \leftrightarrow g$, azaz $(\neg x \vee g) \wedge (x \vee \neg g)$

g címkéje igaz $\mapsto$ g

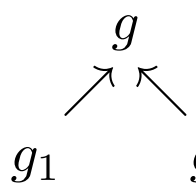
g címkéje hamis $\mapsto$ $\neg g$

g címkéje $\vee$:



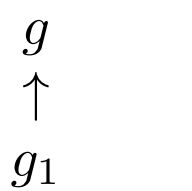
$\mapsto$ $g \leftrightarrow (g_1 \vee g_2)$, azaz
$(\neg g \vee g_1 \vee g_2) \wedge (\neg g_1 \vee g) \wedge (\neg g_2 \vee g)$

g címkéje $\wedge$:



$\mapsto$ $g \leftrightarrow (g_1 \wedge g_2)$, azaz
$(\neg g \vee g_1) \wedge (\neg g \vee g_2) \wedge (\neg g_1 \vee \neg g_2 \vee g)$

g címkéje $\neg$:



$\mapsto$ $g \leftrightarrow (\neg g_1)$, azaz
$(\neg g \vee \neg g_1) \wedge (g_1 \vee g)$

g kimenő kapu $\mapsto$ g

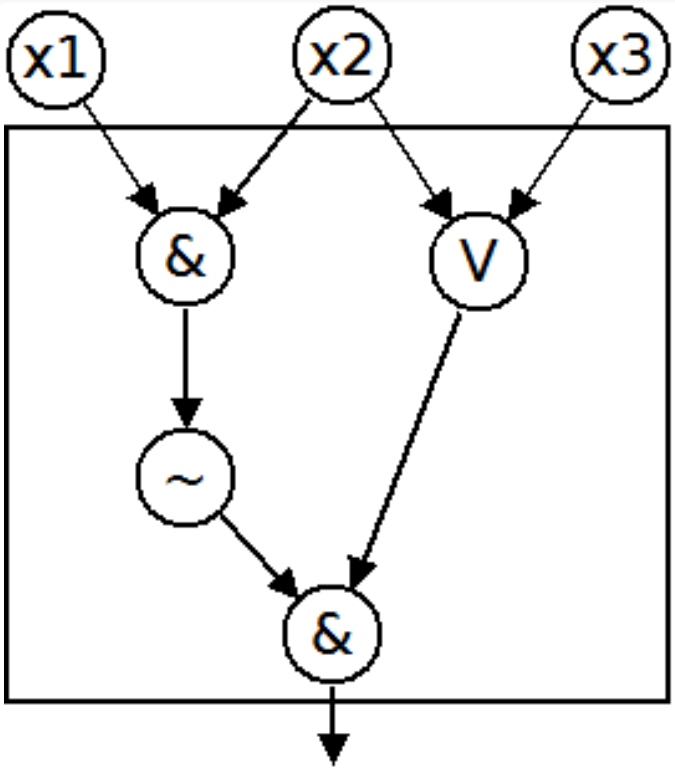
Hálózat-Kielégíthetőség $\leq_{\mathcal{P}}$ Sat

A keresett formula: a fenti formulák konjunkciója.

Adott hálózathoz a formula elkészíthető lineáris időben.
Továbbá a hálózat akkor és csak akkor kielégíthető, ha a formula az.

Hálózat-Kielégíthetőség $\leq_{\mathcal{P}}$ Sat példa

Példa



$(g_1 \leftrightarrow x_1) \ \wedge \ (g_2 \leftrightarrow x_2) \ \wedge \ (g_3 \leftrightarrow x_3)$
$\wedge \, (g_4 \leftrightarrow (g_1 \wedge g_2)) \wedge \ (g_5 \leftrightarrow (g_2 \vee g_3)) \wedge$
$(g_6 \leftrightarrow (\neg g_4)) \wedge \ (g_7 \leftrightarrow (g_5 \wedge g_6)) \wedge \ g_7.$

CNF alakban:

$(\neg g_1 \vee x_1) \wedge (g_1 \vee \neg x_1) \ \wedge \ (\neg g_2 \vee x_2) \wedge$
$(g_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg g_3 \vee x_3) \wedge (g_3 \vee \neg x_3) \ \wedge$
$(\neg g_4 \vee g_1) \wedge (\neg g_4 \vee g_2) \wedge (g_4 \vee \neg g_1 \vee$
$\neg g_2) \wedge (\neg g_5 \vee g_2 \vee g_3) \wedge (g_5 \vee \neg g_2) \wedge (g_5 \vee$
$\neg g_3) \ \wedge \ (\neg g_6 \vee \neg g_4) \wedge (g_6 \vee g_4) \ \wedge \ (\neg g_7 \vee$
$g_5) \wedge (\neg g_7 \vee g_6) \wedge (g_7 \vee \neg g_5 \vee \neg g_6) \ \wedge g_7.$

Első kiszámítható teljes problémáink

Emlékezzünk: egy $\mathcal{C}$-beli probléma $\mathcal{C}$-teljes, ha **minden** $\mathcal{C}$-beli probléma visszavezethető rá.

Eddig még csak eldönthetetlen, **RE**-teljes problémákkal találkoztunk: a Megállás ilyen volt.

A Hálózat-Kiértékelés probléma **P**-beli.

Tétel

A Hálózat-Kielégíthetőség probléma **NP**-teljes.

Következmény (Cook tétele)

A Sat probléma is **NP**-teljes.

SAT NP-teljességéről

Mivel a SAT probléma **NP**-teljes,

- ha polinomidőben megoldható lenne, akkor $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
  (Ebben persze lehet **hinni**. De eddig még senki nem oldotta meg polinomidőben. . .)
- Nem ismert rá **szubexponenciális** algoritmus.
- Ilyenkor bevethetők (a teljesség igénye nélkül):
  - **heurisztikák**
  - **randomizált algoritmusok** alkalmazása
  - a követelmények **relaxálása. . .** (pl. nem az összes, de minél több klóz egyszerre történő kielégítése)
  - . . . majd a relaxált követelmények **approximálása**
  - vagy olyan **speciális esetek** keresése, melyre van hatékony algoritmus.

A kielégíthetőség változatai

A SAT problémának vizsgálhatjuk **speciális eseteit**, pl:

- klózonként csak **konstans sok** literált engedünk meg
- csak speciális (pl. **Horn**) alakú klózokat engedünk meg

Definíció

Legyen $k \geq 1$. A kSAT a SAT azon speciális esete, amelyben minden klóz pontosan k (nem feltétlenül különböző) literálból áll.

3SAT

Állítás

3SAT **NP**-teljes, és így $k \geq 3$ esetén kSAT **NP**-teljes.

Bizonyítás

$$
\begin{array}{rcl}
\ell & \mapsto & \ell \vee \ell \vee \ell \\
\ell_1 \vee \ell_2 & \mapsto & \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_2 \\
\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 & \mapsto & \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \\
\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4 & \mapsto & (\ell_1 \vee \ell_2 \vee x) \wedge (\neg x \vee \ell_3 \vee \ell_4) \\
\vdots & & \vdots \\
\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_n & \mapsto & (\ell_1 \vee \ell_2 \vee x) \wedge (\neg x \vee \ell_3 \vee y) \wedge \\
 & & (\neg y \vee \ell_4 \vee z) \wedge \ldots \wedge (\neg u \vee \ell_{n-1} \vee \ell_n)
\end{array}
$$

3SAT

Állítás

Legyen $\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots\ldots \wedge c_k$ konjunktív normálformájú formula.
Minden c_i klózhoz legyen c_i' az előzőekben adott kifejezés, ahol minden kifejezésben új változókat használunk.
Ekkor φ akkor és csak akkor kielégíthető, ha $\varphi' = c_1' \wedge c_2' \wedge \ldots \wedge c_k'$ az.

Mivel $\text{SAT} \leq_{\mathcal{P}} \text{3SAT}$ és $\text{3SAT} \in \mathbf{NP}$, ezért SAT $\mathbf{NP}$-teljességéből következik, hogy 3SAT is $\mathbf{NP}$-teljes.

2SAT

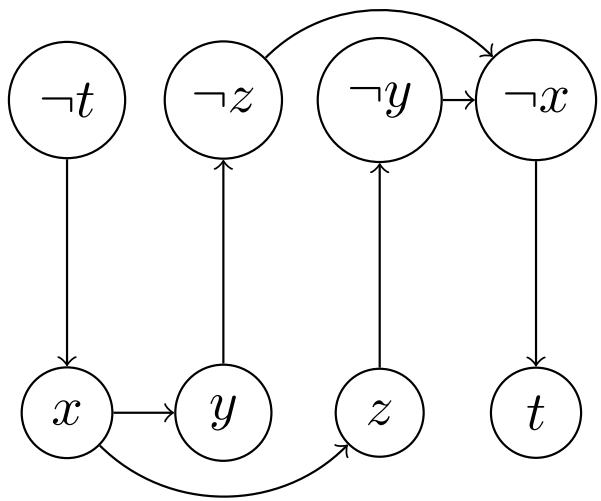
A 2SAT problémára viszont adható hatékony algoritmus.
Legyen φ egy $2 - CNF$ (minden klóz két literálból áll).

A $G(\varphi)$ gráf

- csúcsok: a φ-ben előforduló változók és negáltjaik.
- élek: (α, β) él $\Leftrightarrow$ $\overline{\alpha} \vee \beta$ vagy $\beta \vee \overline{\alpha}$ a φ tagja (azaz ha $\alpha \to \beta$ vagy $\overline{\beta} \to \overline{\alpha}$ a φ tagja.)

Példa

Legyen $\boldsymbol{\varphi = (\neg x \vee z) \ \wedge \ (\neg x \vee y) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg z) \ \wedge \ (x \vee t)}$.
Ekkor $G(\varphi)$:



Tétel

A φ formula akkor és csak akkor kielégíthető, ha nincs olyan x változó, amelyre létezik $G(\varphi)$-ben irányított út x-ből $\neg x$-be és vissza.

Ötlet

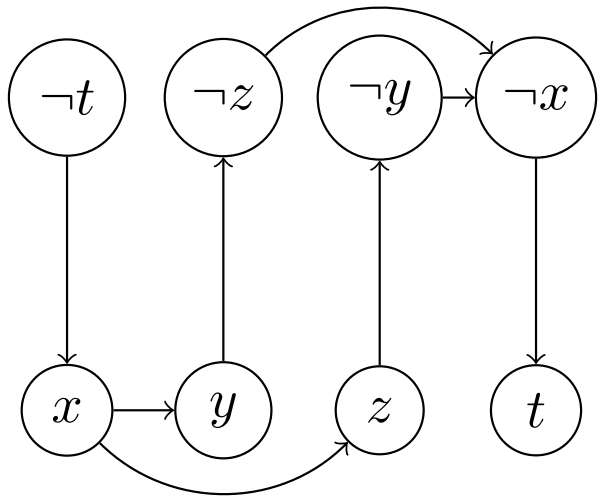
Minden él egy implikációnak felel meg.
Így ha ℓ_1-ből ℓ_2 elérhető, akkor $\varphi \models (\ell_1 \to \ell_2)$.
Ha x-ből is elérhető $\neg x$ és fordítva, akkor $\varphi \models (x \leftrightarrow \neg x)$, így φ kielégíthetetlen.
Ha nincs ilyen változó, akkor ciklusban:

- válasszunk egy olyan ℓ literált, amiből nem érhető el $\overline{\ell}$ és melynek még nem adtunk értéket;
- állítsuk 1-re ℓ-t és minden belőle elérhető literált, komplementereiket pedig nullára;

amíg minden változónak értéket nem adtunk (nem lesz ütközés, ha nincs olyan x, akiből $\neg x$ elérhető és viszont). Az így kapott értékelés kielégíti φ-t.

Példa

$\boldsymbol{\varphi = (\neg x \vee z) \ \wedge \ (\neg x \vee y) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg z) \ \wedge \ (x \vee t).}$



Válasszuk először x-et. $G(\varphi)$-ben x-ből elérhető $\neg x$.
igaz-ra állítjuk $\neg x$-et és t-t, hamis-ra x-et és $\neg t$-t.
Ezek után válasszuk mondjuk y-t. y-ból nem érhető el $\neg y$, tehát $\alpha := y$.
igaz-ra állítjuk y-t és $\neg z$-t, hamis-ra pedig $\neg y$-t és z-t.
A kapott értékadás kielégíti φ-t.

2Sat

Következmény

2Sat $\in \mathbf{P}$.

Horn-formulák és Horn-átnevezhető formulák

Egy klóz **Horn-klóz**, ha benne maximum egy pozitív literál szerepel.
Egy CNF **Horn-formula**, ha benne minden klóz Horn-klóz.
Egy CNF **Horn-átnevezhető**, ha bizonyos változói komplementálásával Horn-formulává tehető (vagyis ha van változók egy olyan X halmaza, hogy minden $x \in X$-re x helyébe $\neg x$-et, $\neg x$ helyébe x-et írva a formulába, az eredmény Horn-formula lesz).

Példa

- $x \ \wedge \ (\neg x \vee y) \ \wedge \ (\neg y \vee z) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg z)$ Horn-formula.
- $(x \vee y) \ \wedge \ (\neg x \vee \neg y)$ Horn-átnevezhető.
- $(\neg x \vee \neg y) \ \wedge (\neg x \vee y) \ \wedge \ (x \vee \neg y) \ \wedge \ (x \vee y)$ **nem** Horn-átnevezhető.

Horn-formulák és Horn-átnevezhető formulák

Tétel

Horn-átnevezhető formulák kielégíthetősége polinom időben eldönthető.

Ötlet

Az **egységrezolúció** alkalmazása ezekre a formulákra teljes:

- amíg találunk egy egyetlen literálból álló $\{\ell\}$ klózt:
- ℓ értékét 1-re állítjuk;
- töröljük az összes, ℓ-t tartalmazó klózt;
- a maradék klózokból töröljük az $\overline{\ell}$ literált.

Ha közben megkapjuk az üres klózt, a formula kielégíthetetlen; ellenkező esetben kielégíthető.

Az algoritmus (ésszerű reprezentációval) lineáris időben végrehajtható és Horn-átnevezhető formulákra helyes.

Horn-formulák és Horn-átnevezhető formulák

Megjegyzés

Az is polinom időben eldönthető egy CNF-ről, hogy Horn-átnevezhető-e.

Megjegyzés

„Keverni" nem tudjuk a két hatékonyan eldönthető speciális esetet:
NP-teljes a következő probléma: adott egy olyan CNF, melyben minden klóz

- vagy max. két literálból áll,
- vagy háromelemű negatív klóz,

kielégíthető-e?

Ötlet: $3\mathbf{Sat} \leq \mathbf{ez}$

Változónként $(x \vee \hat{x}) \wedge (\neg x \vee \neg \hat{x})$ és ehhez hozzá minden eredeti klózban a pozitív x literálokat $\neg \hat{x}$-re cseréljük

Az előfordulásszám csökkentése

Azt is próbálhatjuk korlátozni, hogy egy változó (vagy egy literál) hányszor fordulhat elő legfeljebb a formulában.

Tétel

NP-teljes a következő probléma: adott egy 3CNF, melyben minden változó legfeljebb háromszor szerepel, kielégíthető-e?

P-ben van a következő probléma: adott egy CNF, melyben minden változó legfeljebb kétszer szerepel, kielégíthető-e?

NP-teljes gráfelméleti problémák

Független Csúcshalmaz

Adott: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, K szám.

Kérdés: Létezik-e K elemű független csúcshalmaz?

Tétel

A Független Csúcshalmaz probléma **NP**-teljes.

Bizonyítás

Világos, hogy a probléma **NP**-ben van. Megmutatjuk, hogy 3Sat visszavezethető a Független Csúcshalmaz-ra.

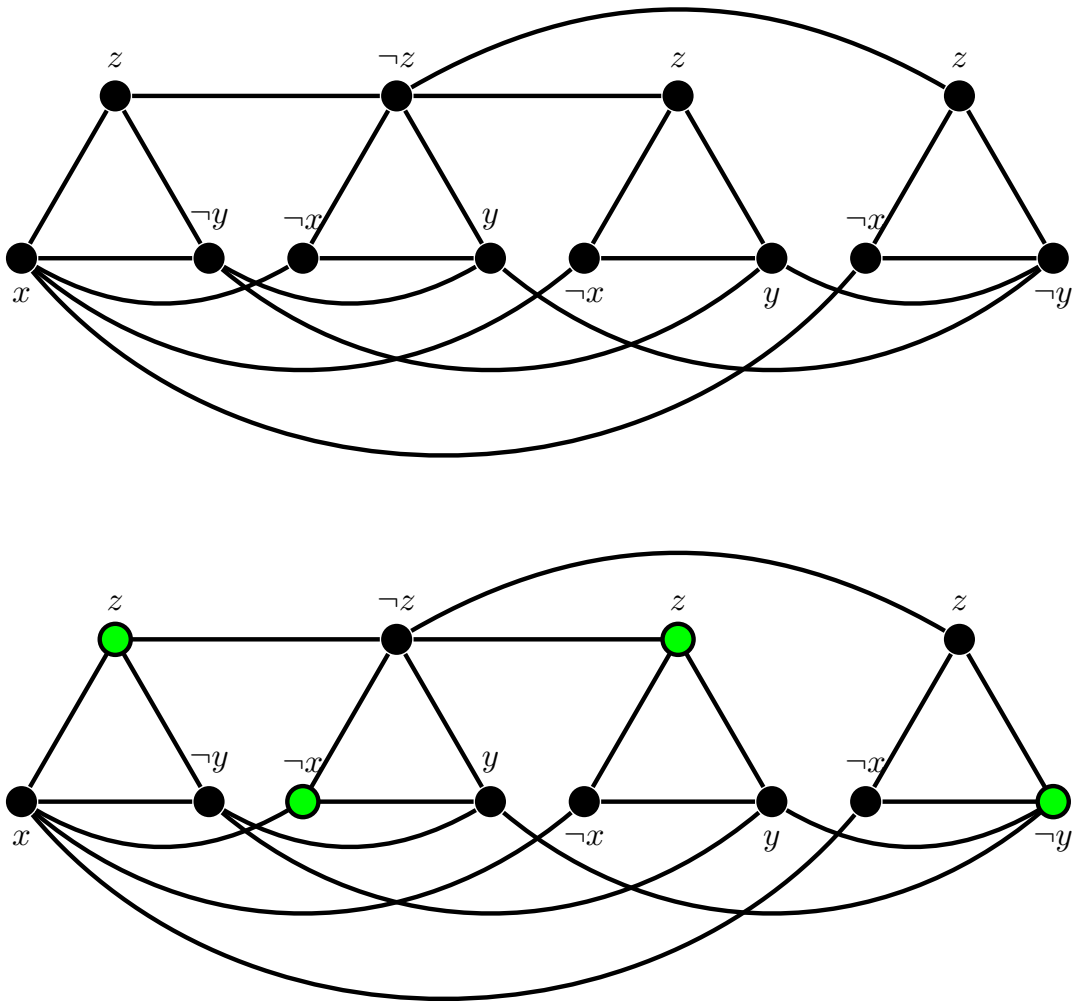
Legyen φ a 3Sat egy példánya, $\varphi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$. A G gráf álljon m darab **háromszögből**, melyek a c_i tagoknak felelnek meg, s melyek csúcsai a c_i-kben lévő literáloknak felelnek meg. Ezen kívül még kössünk össze éllel **minden ellentétes literált**. Végül legyen $\boldsymbol{K = m}$.

φ kielégíthető $\Leftrightarrow$ G-ben létezik K elemű független csúcshalmaz.

Független Csúcshalmaz

Példa

Legyen $\varphi = (x \vee \neg y \vee z) \ \wedge \ (\neg x \vee y \vee \neg z) \ \wedge \ (\neg x \vee y \vee z) \ \wedge \ (\neg x \vee \neg y \vee z)$.
Ekkor a G gráf:



NP-teljes gráfelméleti problémák

Klikk

Adott: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, K szám.

Kérdés: Létezik-e K elemű klikk (teljes részgráf)?

Tétel

Klikk **NP**-teljes.

Bizonyítás (visszavezetéssel): gyakorlaton.

NP-teljes gráfelméleti problémák

Csúcslefedés

Adott: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, K szám.

Kérdés: Létezik-e olyan K elemű csúcshalmaz, hogy minden él illeszkedik a halmaz egy csúcsához?

Tétel

A Csúcslefedés probléma **NP**-teljes.

Bizonyítás (visszavezetéssel): gyakorlaton.

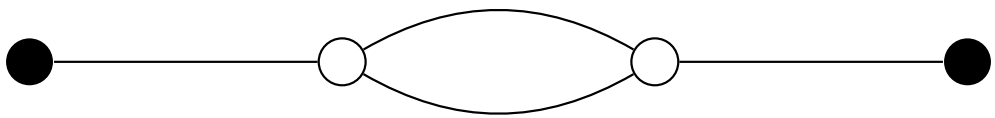
NP-teljes gráfelméleti problémák

Tétel

A Hamilton-Út probléma **NP**-teljes.

Ötlet

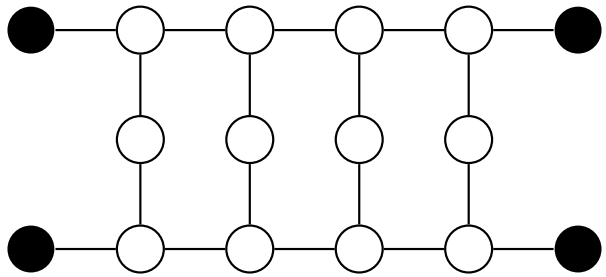
„Értékválasztó” gadget:



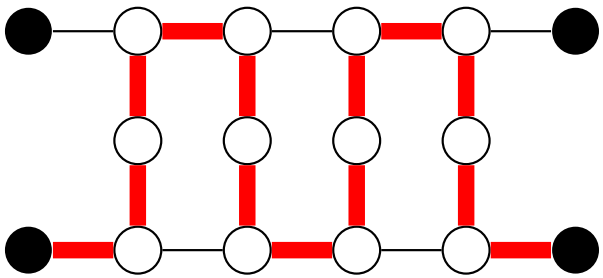
(Balról jobbra ha megy egy Hamilton-út, akkor **választanunk** kell a „fenti” és a „lenti” útvonal közül egyet.)
$\Rightarrow$ mint egy értékadás – ilyen gadgetből változónként lesz egy

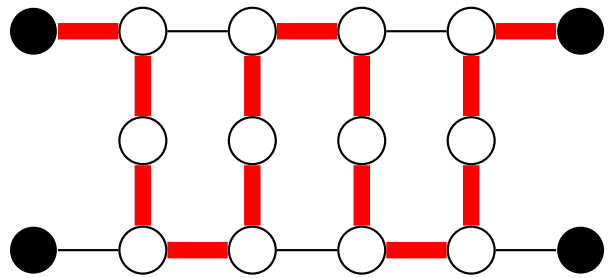
Ötlet

„XOR" gadget:

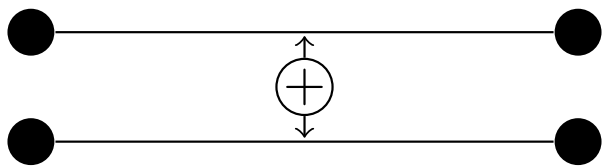


Minden Hamilton-út egy olyan gráfban, ami ezt a gadgetot **feszített részgráfként** tartalmazza, a következők egyike ezen a gráfon belül:





Hogy átláthatóbb legyen a rajzunk, ezt a gadgetet így rajzoljuk:



Ötlet

A XOR gadgettel egy gráfban olyan Hamilton-kört keresünk, melyben **ki tudjuk kötni bizonyos élpárokra**, hogy a két él közül a keresett Hamilton-kör **pontosan egyen** haladjon át.

A teljes konstrukció a $3\text{SAT} \leq \text{HAMILTON-ÚT}$ visszavezetéshez:

- minden változóhoz létrehozunk egy **értékválasztó gadget**et, az x_i-hez tartozó két párhuzamos élt x_i-vel ill. $\neg x_i$-vel címkézzük;
- minden klózhoz létrehozunk egy **háromszöget**, az $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$ klózhoz létrehozott háromszög éleit rendre ℓ_1-gyel, ℓ_2-vel és ℓ_3-mal címkézzük;
- az ellentétes literálokkal címkézett élek között XOR gadgetet hozunk létre;
- az értékválasztó gadgeteket láncba kötjük;
- a háromszögek csúcsaiból, az utolsó értékválasztó csúcsból és még egy plusz csúcsból pedig egyetlen nagy klikket készítünk;
- végül az előző pontbeli plusz csúcsból még egy új csúcsba lépünk.

Ez a konstrukció egy $3\text{SAT} \leq \text{HAMILTON-ÚT}$ visszavezetés lesz.

Így, mivel Hamilton-Út $\leq_{\mathcal{P}}$ Tsp(E), így a Tsp(E) probléma **NP**-teljes.

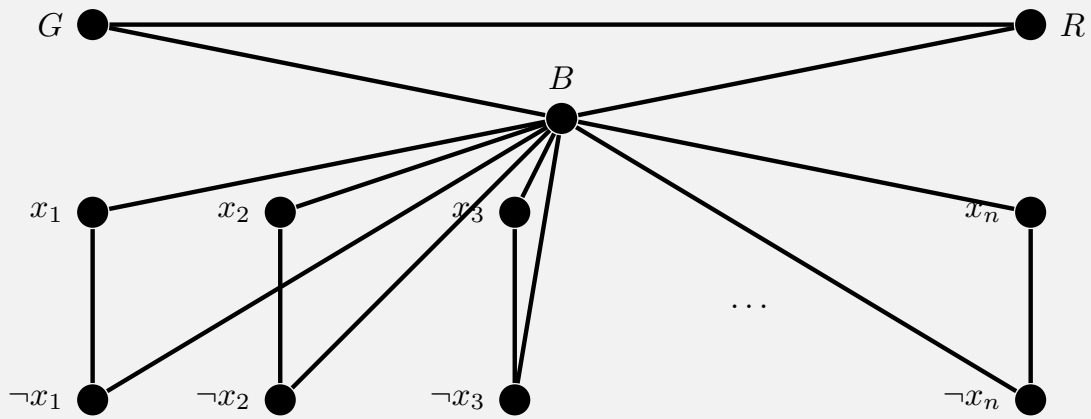
Tétel

A 3-Színezés probléma **NP**-teljes.

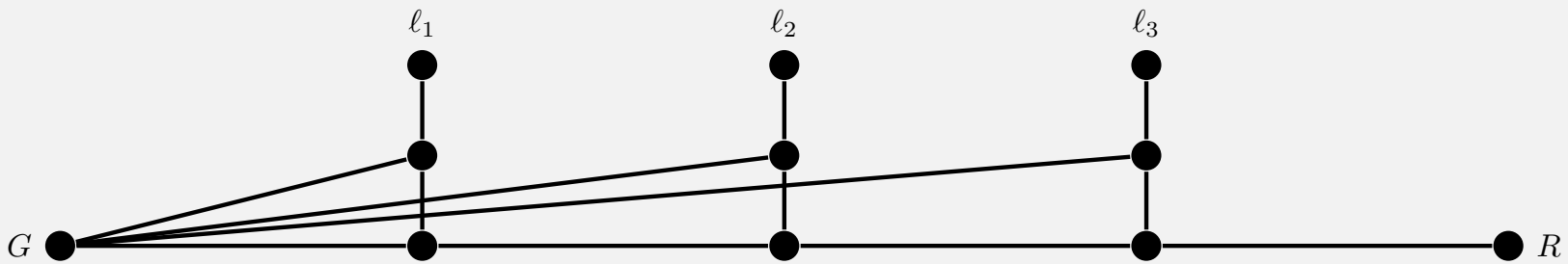
Megjegyzés

A 2-Színezés probléma **P**-ben van.
A 4-Színezés probléma **triviális** síkbarajzolható gráfokra.

3Sat $\leq$ 3-Színezés: ötlet



így minden literál színe R (=„hamis") vagy G (=„igaz") színével kell megegyezzen, komplementere pedig egy másikkal $\Rightarrow$ kiértékelés



Ellenőrizhető: ha mindhárom literál R színét kapja, a plusz hat csúcsot nem lehet helyesen 3-színezni, ha viszont van köztük G színű, akkor igen

NP-teljes problémák halmazokra és számokra

Hármasítás

Adott: Három azonos méretű halmaz, F (fiúk), L (lányok), H (házak), és egy $R \subseteq F \times L \times H$ reláció.

Kérdés: Megadható-e az R-beli hármasok egy olyan részhalmaza, melyben minden fiú, lány és ház pontosan egyszer szerepel?

Világos, hogy Hármasítás $\in \mathbf{NP}$.

Tétel

A Hármasítás probléma **NP**-teljes.

Megjegyzés

Párosítás $\in \mathbf{P}$.

Halmazlefedés

Adott: Egy U halmaz részhalmazainak $C = (S_1, \ldots, S_n)$ rendszere és egy K szám.

Kérdés: Kiválasztható-e K darab az S_i-k közül úgy, hogy ezek egyesítése U?

Halmazpakolás

Adott: Egy U halmaz részhalmazainak $C = (S_1, \ldots, S_n)$ rendszere és egy K szám.

Kérdés: Kiválasztható-e az S_i-k közül K darab, páronként diszjunkt halmaz?

Pontos Lefedés Hármasokkal

Adott: Egy $3m$ elemű U halmaz és 3-elemű részhalmazainak $(S_1, \ldots, S_n)$ rendszere.

Kérdés: Kiválasztható-e m darab S_i úgy, hogy ezek egyesítése U? (A kiválasztott S_i-k nyilván diszjunktak.)

NP-teljes problémák halmazokra

Tétel

A Halmazlefedés, Halmazpakolás, Pontos Lefedés Hármasokkal problémák **NP**-teljesek.

Bizonyítás

A Hármasítás a Pontos Lefedés Hármasokkal **speciális esete**.
A Pontos Lefedés Hármasokkal a Halmazlefedés, valamint a Halmazpakolás speciális esete is.

Egész Értékű Programozás

Adott: Egy n-változós, egész együtthatós lineáris egyenlőtlenség-rendszer.
Kérdés: Létezik-e **egész értékű** megoldás?

A Halmazlefedés felfogható az Egész Értékű Programozás speciális eseteként:

$$Ax \geq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq B, \quad 0 \leq x_i \leq 1,$$

ahol A oszlopai a halmazrendszer elemeinek felelnek meg.
Azt is meg lehet mutatni, hogy az Egész Értékű Programozás **NP**-ben van.

Tétel

Az Egész Értékű Programozás probléma **NP**-teljes.

NP-teljes problémák halmazokra és számokra

A Részletösszeg probléma

Adott: $a_1, \ldots, a_n$ pozitív egészek és egy $K > 0$ célszám.
Kérdés: Kiválasztható-e az a_i-k közül néhány elem úgy, hogy összegük K legyen?

Tétel

A Részletösszeg probléma **NP**-teljes.

Az **NP**-beliség világos, az **NP**-nehézséget a 3Satról való visszavezetéssel igazoljuk.

NP-teljes problémák halmazokra és számokra

3Sat $\leq$ Részletösszeg

- Legyen $\varphi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$ egy 3CNF, $c_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \ell_{i,3}$.
- A φ-beli változók legyenek $x_1, \ldots, x_m$.
- Ebből elkészítjük a Részletösszeg probléma egy példányát, melyben $n+m$-jegyű (!) számok szerepelnek.
- x_i-ből a t_i és f_i számok készülnek:
  - t_i és f_i első m jegye csupa 0, kivéve az i. jegyet, ami 1-es;
  - t_i utolsó n jegye közül az $m+k$. akkor 1-es, ha c_k-ban szerepel x_i, egyébként 0;
  - f_i utolsó n jegye közül az $m+k$. akkor 1-es, ha c_k-ban szerepel $\neg x_i$, egyébként 0.
- Továbbá, $a_i = b_i = 10^i$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén.
- Az eredmény: a $\{f_i, t_i : 1 \leq i \leq m\} \cup \{a_i, b_i : 1 \leq i \leq n\}$ halmaz és a $K = 11\ldots133\ldots3$ célszám (m darab 1-es, majd n darab 3-as).

Példa

Ha $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \ \vee \ (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \ \vee \ (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 1000110 \\
f_1 &= 1000001 \\
t_2 &= 0100001 \\
f_2 &= 0100110 \\
t_3 &= 0010100 \\
f_3 &= 0010000 \\
t_4 &= 0001010 \\
f_4 &= 0001001 \\
a_1 = b_1 &= 0000100 \\
a_2 = b_2 &= 0000010 \\
a_3 = b_3 &= 0000001 \\
\hline
K &= 1111333
\end{aligned}
$$

- t_1 és f_1 közül pontosan az egyiket kell válasszuk (K első jegye miatt);
- általában t_i és f_i közül is pontosan az egyiket – t_i választása feleljen meg az $x_i = 1$, f_i választása az $x_i = 0$ értékadásnak;
- ezzel az $m + j$. jegyek mindegyike 0, 1, 2 vagy 3 lesz $j = 1, \ldots, n$-re, annak függvényében, hogy c_j-ben 0, 1, 2 vagy 3 literál vált igazzá;
- ha az $m + j$. jegy 3, akkor jó, ha 2, akkor válasszuk ki még mondjuk a_j-t, ha 1, akkor a_j-t és b_j-t is, ha 0, akkor nem tudjuk ezen a jegyen elérni a célszámot

NP-teljes problémák halmazokra és számokra

Az Egész Értékű Programozás egy másik speciális esete:

Hátizsák

Adott: n elem mindegyikének w_i súlya és c_i értéke, valamint W és C.
Kérdés: Kiválasztható-e ismétlés nélkül néhány elem úgy, hogy összértékük $\geq C$ és összsúlyuk $\leq W$?

Tétel

A Hátizsák probléma **NP**-teljes.

Ötlet

A Részletösszeg problémában az a_i értékekből rendre készítsünk egy tárgyat $w_i = c_i = a_i$ súllyal és értékkel, továbbá legyen $C = W = K$, a célszám.

Algoritmus a Hátizsák eldöntésére

A következő rekurzív összefüggéssel számítható $T[i, w]$, ami a legfeljebb az első i tárgy felhasználásával egy w kapacitású hátizsákkal elérhető maximális haszon:

$$T[i,w] = \begin{cases} 0 & \text{ha } i = 0 \\ T[i-1,w] & i > 0, w < w_i \\ \max\{T[i-1,w], c_i + T[i-1, w-w_i]\} & i > 0, w \geq w_i \end{cases}$$

Ez ad egy $\mathcal{O}(n \cdot W)$ időigényű algoritmust, ami **nem** polinom, mert az input mérete $n(\log w_i + \log c_i) + \log W$.

Felfoghatjuk úgy is, hogy az algoritmusunk akkor polinomidejű, ha az inputban a súlyokat unárisan reprezentáljuk, vagy ha a súlyok a tárgyak számának egy polinomjával korlátozhatóak.

Ez vezet el az algoritmikus bonyolultságelméletben a **pszeudopolinomialitás** fogalmához.

Pszeudopolinomiális algoritmusok, erős/gyenge **NP**-teljesség

Pszeudopolinomiális algoritmusok

Legyen A egy probléma. Egy A-t eldöntő algoritmus **pszeudopolinomiális**, ha tetszőleges $(a_1, \dots a_m)$ inputon a futásideje $\mathcal{O}\Big(\big(\sum_{1\leq i\leq m} a_i\big)^k\Big)$, valamely konstans k-ra.
(Emlékezzünk vissza: az input **mérete** $\sum_{1\leq i\leq m} \mathbf{log} a_i$ volt!
Ha egy **NP**-teljes probléma eldönthető pszeudopolinomiális algoritmussal, úgy **gyengén NP-teljesnek**, ha pedig unáris változata is **NP**-teljes, akkor **erősen NP-teljesnek** nevezzük.

Átfogalmazás

Ha egy erősen **NP**-teljes problémára van pszeudopolinomiális algoritmus, akkor $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Pszeudopolinomiális algoritmusok, erős **NP**-teljesség

Példa

- A HÁTIZSÁK probléma gyengén **NP**-teljes.
- A TSP probléma viszont erősen **NP**-teljes.
- Pozitív egészek faktorizálására van pszeudopolinomiális algoritmus, de nem ismert rá polinomidejű.

A gyengén **NP**-teljes problémák mindazon példányai gyakorlatilag megoldhatónak tekinthetőek, melyekben az inputon érkező számok **értéke** korlátozható az input **méretének** egy **polinomfüggvényével**.
(Pl. a HÁTIZSÁK vagy a PARTÍCIÓ sok „kisméretű" tárgy esetén.)

PARTÍCIÓ

- **Input**: $a_1, \ldots, a_n$ pozitív egészek.
- **Kérdés**: Van-e $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, melyre $\sum_{i \in I} a_i = \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} a_i}{2}$?

A probléma (gyengén) **NP**-teljes.

Relaxáció

A HÁTIZSÁK probléma egészértékű programozási feladatként felírva:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geq C$$

$$0 \leq x_i \leq 1$$

Egy ILP feladat **LP-relaxációját** kapjuk, ha az egészek helyett a valósak körében oldjuk meg. (Azaz elhagyjuk az „x_i egész" feltételt.)
Mivel $\mathrm{LP} \in \mathbf{P}$, a relaxált feladat hatékonyan megoldható.

Töredékes Hátizsák

- Mint a Hátizsák, de a tárgyak törhetők: az i-edik tárgy x_i-ed része, $0 \leq x_i \leq 1$ egy $c_i x_i$ értékű, $w_i x_i$ súlyú tárgy.
- Erre a feladatba a hatékony **mohó** algoritmus optimális.
- Kérdés, hogy mennyire jól „közelíti” az eredeti (függvény)problémát?

Approximáció

A következőkben olyan **optimalizálási** problémákra próbálunk adni hatékony **közelítő** algoritmusokat, melyeknek eldöntési változata $\mathbf{NP}$-nehéz.

Az f függvény minimalizálási/maximalizálási probléma, ha $f(I) = \arg\min_{s \in S(I)} c(s)$ / $\arg\max_{s \in S(I)} c(s)$ alakú, ahol $S(I)$ az I inputhoz tartozó **lehetséges megoldások** (nemüres) halmaza, c pedig minden megoldáshoz egy valós költséget/értéket rendelő függvény.

Ha f egy optimalizálási probléma, $\alpha > 0$ egy konstans, A pedig egy olyan polinomidejű algoritmus, melyre $A(I) \in S(I)$ minden I inputra úgy, hogy

$$\forall I : \ \max\left\{\frac{c(A(I))}{c(f(I))}, \frac{c(f(I))}{c(A(I))}\right\} \ \leq \ \alpha,$$

akkor A egy **α-approximáló algoritmus f-re**.

Csúcslefedés

Emlékeztető

Input: $G = (V, E)$ gráf, $K > 0$ egész.
Output: van-e olyan, legfeljebb K méretű X csúcshalmaz G-ben, melyre igaz, hogy G minden élének legalább az egyik végpontja X-beli?

Optimalizálási változat

Input: $G = (V, E)$ gráf.
Output: mekkora a **legkisebb** lefogó csúcshalmaz G-ben? (megoldás: egy lefogó csúcshalmaz; költsége: a mérete)

Természetesen ha az optimalizálási változatra lenne egy hatékony módszer, akkor az eldöntésire is. Mivel az eldöntési változat $\mathbf{NP}$-teljes, így az optimalizálási változatra sem ismert hatékony algoritmus.

Csúcslefedés

Tekintsük a Csúcslefedés-re a következő egyszerű algoritmust:

- Legyen $X = \emptyset$.
- Amíg van él G-ben:
  - Válasszunk egy **tetszőleges** e élt.
  - Vegyük be X-be e **mindkét** végpontját.
  - Vegyük el G-ből az összes, e bármelyik végpontjára illeszkedő élt.
- Adjuk vissza X-et.

Példa

TODO

Csúcslefedés

Tétel

Az előző fólián szereplő algoritmus egy 2-approximáló algoritmus a Csúcslefedésre.

Ötlet

- Az algoritmus nyilván egy lefogó csúcshalmazt ad vissza.
- Ha az X halmazba rendre az e_1, e_2, ..., e_k élek végpontjai kerültek bele, akkor $e_1, \ldots, e_k$ egy párosítás G-ben, mindegyiküknek legalább az egyik végpontját le kell fogni, vagyis a minimum legalább k.
- Az algoritmus által visszaadott eredmény pedig $2k$.

A Csúcslefedésre a mai napig **nem ismert ennél jobb** approximációs algoritmus.

TSP

Tétel

A TSP probléma nem közelíthető: **nincs** α-approximáló algoritmus, csak ha $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Ötlet

Tegyük fel, hogy van egy α-approximáló A algoritmus TSP-re.
Akkor A-t felhasználva meg tudjuk oldani a Hamilton-kört a következőképpen: a $G = (V, E)$ gráfból készítsük $V \times V$-n az alábbi $D(G)$ távolságmátrixot:

$$d_{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{ha } (u, v) \in E; \\ |V| \cdot \alpha + 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor ha van Hamilton-kör, az optimum $|V|$; ha nincs, az optimum legalább $|V| \cdot \alpha + 1$.

Ötlet befejezése

Ekkor a következő algoritmus:

Ha $A(D(G)) \leq |V| \cdot \alpha + 1$, fogadjuk el G-t, egyébként utasítsuk el

eldönti a Hamilton-kör problémát, polinomidőben.

Így várhatóan (hacsaknem $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$) nincs approximáló algoritmus sem TSP-re. Kereshetünk viszont olyan speciális esetet, amire van.

Metrikus TSP

A probléma

Input: egy D távolságmátrix, **ami teljesíti a háromszögegyenlőtlenséget**:

$$\forall i, j, k : \; D_{i,j} + D_{j,k} \; \geq \; D_{i,k}.$$

Output: a minimális összsúlyú körút súlya.

Bonyolultság

Az eldöntési probléma továbbra is **NP**-nehéz.
(Ilyen mátrixot állítottunk elő a Hamilton-kör $\mathrm{TSP}(E)$-re való visszavezetésekor.)

Metrikus TSP: 2-approximáló algoritmus

Algoritmus

- Állítsuk elő (Prim vagy Kruskal algoritmusával, például) D egy **minimális feszítőfáját**.
- Kettőzzük meg a fa éleit.
- A kapott multigráfnak vegyük egy Euler-körvonalát.
- A körvonalból hagyjuk el a korábban már meglátogatott csúcsokat.
- Adjuk vissza az így kapott kör összsúlyát.

Közelítés

A fenti egy 2-approximáló algoritmus a Metrikus TSP-re.

Metrikus TSP: 2-approximáló algoritmus

Példa

TODO

Metrikus TSP: 2-approximáló algoritmus

2-approximálás

Az algoritmus 2-approximáló, ez a következőkből áll össze:

- egy tényleges körút költségét adja vissza;
- bármilyen körútból elhagyva egy élt egy feszítőfát kapunk $\Rightarrow$ a minimális feszítőfa összsúlya kisebb, mint a minimális körúté;
- az élek kettőzésével kapott gráfban ill. annak az Euler-körvonalában az élek összsúlya tehát kisebb, mint **kétszer** a minimális körúté;
- a már látott pontok kihagyásával **a háromszög-egyenlőtlenség miatt** nem növekszik az összsúly.

Megjegyzés: $\frac{3}{2}$-approximálás

Az élek kettőzése helyett egy „ügyesebb” módszerrel kaphatunk egy $\frac{3}{2}$-approximáló algoritmust is.

Max-2SAT

A probléma

Input: egy $2CNF$, klózonként pontosan két literállal; **a literálok változói különböznek.**
Output: egyszerre legfeljebb hány klóz elégíthető ki benne?

Bonyolultság

Tudjuk, hogy a $2\mathrm{SAT}$ probléma $\mathbf{P}$-beli.
Viszont, ennek az optimalizálási problémának az eldöntési változata (input egy F $2CNF$ és egy K szám, kielégíthető-e F-ben egyszerre K klóz?) $\mathbf{NP}$-teljes.

Először adunk egy **randomizált $\frac{4}{3}$-közelítő algoritmust**, aztán ezt **derandomizálva** egy determinisztikusat.

Randomizált algoritmus

Random: várható értékben approximáljon

Egy A randomizált algoritmus α-approximáló, ha **várható értéke** legfeljebb α-szor rosszabb, mint az optimális, vagyis:

$$\forall x \ \max\left\{\frac{E(A(x))}{f(x)}, \frac{f(x)}{E(A(x))}\right\} \ \leq \ \alpha.$$

Max-2SAT

Ebben az esetben tehát egy olyan algoritmust kell adnunk, mely legalább $\frac{3}{4}X$ klózt kielégít az input formulában, ha legfeljebb X elégíthető ki egyszerre. Ennél többet teszünk: olyan algoritmust fogunk adni, mely (várható értékben) a klózok $\frac{3}{4}$-ét (tehát nem csak az egyszerre kielégíthető klózokét!) igazzá teszi.

Max-2SAT

Randomizált algoritmus

Állítsunk minden változót egymástól függetlenül $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel igazra vagy hamisra.

Várható érték

Mivel egy klózban két különböző változó van, így annak esélye, hogy a klóz igaz lesz, $\frac{3}{4}$.
A várható érték additivitása miatt így várható értékben a klózok $\frac{3}{4}$-ét kielégítjük.

Derandomizálás

Most az előző dián szereplő véletlen algoritmusban csökkentjük a generálandó véletlen bitek számát: **derandomizálunk**.

Determinisztikus algoritmus

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az input formulában szereplő változók.

- Először értéket adunk x_1-nek, majd x_2-nek, ..., végül x_n-nek, az i-edik menetben x_i-nek.
- Az i-edik menetben $x_1, \ldots, x_{i-1}$ értéke már rögzítve van.
- Számítsuk ki $b = 0, 1$-re, hogy mennyi klóz elégülne ki várható értékben, ha x_i értékét b-re választjuk, $x_{i+1}, \ldots, x_n$ értékét pedig $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel, függetlenül választjuk 0-nak ill. 1-nek.
- Amelyik érték nagyobb lett, arra állítjuk ténylegesen x_i értékét, és folytatjuk a ciklust.

Derandomizálás

Vegyük észre, hogy a várható értéket determinisztikusan ki tudjuk számítani.
Annak esélye, hogy egy klóz értéke igaz, a következőképp számítható:

- ha a klózban van olyan literál, melynek értékét 1-re rögzítettük, akkor 1;
- különben $1 - \frac{1}{2^k}$, ahol $0 \leq k \leq 2$ a klózban levő, még nem rögzített értékű változók száma.

A formulában igazra állított klózok értéke ezek összege.
Azt is be lehet könnyen látni, hogy minden menetben a várható érték nem csökkenhet, így az utolsó menet végére a „várható érték" továbbra is legalább a klózok $\frac{3}{4}$-e lesz.

Max-2SAT példa

Példa

$$\begin{aligned} F \quad = \quad & (x_1 \vee x_2) \ \wedge \ (x_1 \vee \neg x_2) \ \wedge \ (\neg x_1 \vee x_2) \ \wedge \ (\neg x_1 \vee \neg x_2) \ \wedge \\ & (\neg x_1 \vee x_3) \ \wedge \ (\neg x_1 \vee \neg x_3) \ \wedge \ (x_2 \vee \neg x_3) \ \wedge \ (x_2 \vee x_4) \ \wedge \\ & (\neg x_2 \vee x_3) \ \wedge \ (\neg x_2 \vee \neg x_3) \ \wedge \ (x_3 \vee x_4) \ \wedge \ (\neg x_3 \vee \neg x_4) \end{aligned}$$

Determinisztikus

Ha $x_1 = 0$, a várható értékek: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 1, 1, 1, a többi $\frac{3}{4}$, összesen 9.5;
ha $x_1 = 1$, a várható értékek 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, a többi $\frac{3}{4}$, összesen 8.5;
így legyen $x_1 = 0$.
Ezek után ha $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$, a várható értékek 0, 1, 1, 1, 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 1, $\frac{3}{4}$ és $\frac{3}{4}$, összesen 9.5;
ha pedig $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$, a várható értékek 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ és $\frac{3}{4}$, szintén 9.5. Legyen mondjuk $x_2 = 1$.
. . . és így tovább. . .

Töredékes Hátizsák

Algoritmus a Töredékes Hátizsákra

Erre a változatra a **mohó** algoritmus optimális:

- rendezzük csökkenőbe a tárgyakat $\frac{c_i}{w_i}$ szerint;
- eszerint a sorrend szerint vegyünk be annyi tárgyat teljesen, amennyit csak tudunk;
- az első tárgyat, ami nem fér be, pedig „törjük" úgy, hogy a töredék megtöltse a hátizsák maradék kapacitását.

Approximálás?

Adódik a következő ötlet a Hátizsák problémára:

- rendezzük csökkenőbe a tárgyakat $\frac{c_i}{w_i}$ szerint;
- eszerint a sorrend szerint vegyünk be annyi tárgyat, amennyit csak tudunk.

Ez az algoritmus **nem** α-approximálja a Hátizsák problémát, semmilyen α konstansra.

Példa

Ha pl. két tárgyunk van, $w_1 = 1$, $c_1 = 1$, $w_2 = W$ és $c_2 = W - 1$:

- az első tárgy fajlagosan értékesebb, mint a második
- a töredékes változat optimumhelye $(1, \frac{W-1}{W})$, értéke $1 + \frac{(W-1)^2}{W}$
- a mohó algoritmus lefele kerekítő változata tehát az $(1, 0)$ helyen felvett 1 értéket adja vissza
- az optimumhely $(0, 1)$, értéke $W - 1$.

Ha tehát W elég nagy, $1 \cdot \alpha < W - 1$ lesz, így az algoritmus ezen változata nem α-approximáló.

Hátizsák 2-approximálható

Kis módosítás

A következő algoritmus viszont 2-approximálja a Hátizsák problémát:

- Tegyük a tárgyakat fajlagos érték szerint csökkenő sorrendbe: $\frac{c_1}{w_1} \geq \frac{c_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{w_n}$.
- Számítsuk ki a Töredékes Hátizsák optimumhelyét: $(1, 1, \ldots, 1, x, 0, 0, \ldots, 0)$, ahol x a k. tárgy (amelyiket el kellett törnünk, mert már nem fért be).
- Adjuk vissza vagy $\sum_{i=1}^{k-1} c_i$-t, vagy c_k-t, amelyik nagyobb.

Tehát: vagy fajlagosan csökkenő sorrendben beteszünk, amit csak lehet, vagy az így éppen kimaradó tárgyat egyedül rakjuk be, amelyik jobb.

Hátizsák 2-approximálható

Amiért ez legalább az optimum felét adja:

- a töredékes hátizsák optimuma ennek a két értéknek az összegénél kisebb, így a kettő közül a nagyobb legalább a töredékes optimumának fele;
- a töredékes hátizsák optimuma (mivel relaxált változat) legalább akkora, mint a $0/1$ hátizsáké.

Pár kimaradt részlet

Az algoritmus így akkor nem működik, ha minden tárgy befér egyszerre (ekkor az lesz az optimumhely), vagy ha a k. tárgy egyedül se férne be (de az ilyen tárgyakat eleve nem kell felvegyük a listába), de ezek könnyen javíthatók.

Hátizsák $1+\epsilon$-approximálható

Nézzünk egy másik kézenfekvő algoritmust a Hátizsák probléma közelítő megoldására:

Skálázás ϵ-ra

- Legyen $w_1, \ldots, w_n, c_1, \ldots, c_n, W$ a Hátizsák probléma egy inputja és $\epsilon > 0$ egy valós szám.
- Oldjuk meg a $w_1, \ldots, w_n, c'_1, \ldots, c'_n, W$ feladatot dinamikus programozással, ahol $c'_i = \lfloor \frac{c_i}{c_{\max}} \cdot \lfloor \frac{n}{\epsilon} \rfloor \rfloor$, $c_{\max} = \max_i c_i$ és adjuk vissza ennek az eredményét.

Megjegyzés

Tehát mintha a maximális hasznú tárgy haszna $\lfloor \frac{n}{\epsilon} \rfloor$ lenne, a többi haszna pedig evvel arányosan skálázódna (egészrészt véve).

Hátizsák $1+\epsilon$-approximálható

A dinamikus algoritmus

A rekurzív összefüggés most:

$$T[i,c] = \begin{cases} 0 & \text{ha } c \leq 0; \\ \infty & \text{ha } 0 = i < c; \\ \min\{T[i-1,c], T[i-1,c-c_i]+w_i\} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

„Mekkora zsák kell legalább, hogy az első i tárgyból meglegyen legalább c haszon?"

Időigény

Ennek az algoritmusnak az időigénye
$O(\text{poly}(n, n \max c, \log W)) = O(\text{poly}(n \max c \log W))$. (Pszeudopolinomiális.)

Hátizsák $1+\epsilon$-approximálható

$O(\text{poly}(n \max c \log W))$

Ha $\max c = \lfloor \frac{n}{\epsilon} \rfloor$, akkor ez polinom időigény az eredeti input méretében.
Persze nem mindig szolgáltat optimális eredményt, az osztás utáni egészrész vételekor vesztett pontosság miatt.
De ha rögzítjük ϵ-t, akkor **polinom** időigényű és $1+\epsilon$-approximáló algoritmus!

PTAS, FPTAS

PTAS

Azt mondjuk, hogy az f optimalizálási problémára van **polinomidejű approximációs séma**, avagy PTAS, ha van olyan algoritmus, melynek f inputja és egy $\epsilon > 0$ szám a bemenete és tetszőleges rögzített ϵ-ra $(1+\epsilon)$-approximáló polinomidejű algoritmus.

FPTAS

Azt mondjuk, hogy az f optimalizálási problémára van **teljesen polinomidejű approximációs séma**, avagy FPTAS, ha van rá olyan PTAS, mely tetszőleges (x, ϵ) inputra $\mathrm{poly}(|x|, \frac{1}{\epsilon})$ időben fut.

Az előző dián pl. egy FPTAS-t láttunk a HÁTIZSÁK problémára.

Ha egy problémára van FPTAS, azzal tetszőleges inputra tetszőleges pontossággal polinomidőben meg tudjuk határozni az optimumot.

FPTAS és pszeudopolinomiális algoritmusok

Tétel

Ha egy egészértékű optimalizálási probléma

i) optimuma korlátozható az inputméret egy polinomjával

ii) és van rá FPTAS,

akkor van rá pszeudopolinomiális algoritmus.

Ötlet

Ha a fenti korlát n^c, akkor $\epsilon = \frac{1}{n^c}$ megfelelő választás lesz.

Következmény

Ha $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ és egy, a fenti i) tulajdonsággal rendelkező probléma eldöntési változata erősen $\mathbf{NP}$-teljes, akkor nem lehet rá FPTAS.

Néhány további eredmény a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{NP}$ osztályokról

Eddig minden $\mathbf{NP}$-beli problémánkról vagy azt mutattuk meg, hogy $\mathbf{P}$-ben van, vagy azt, hogy $\mathbf{NP}$-teljes.
Azonban. . .

Tétel (Ladner, 1975)

Ha $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, akkor létezik olyan $L \in \mathbf{NP} - \mathbf{P}$, mely nem $\mathbf{NP}$-teljes.

$\mathbf{P}$ és $\mathbf{NPC}$ közt?

Gráf-izomorfizmus

Input: két gráf.
Output: izomorfak-e?

Faktorizálás

Input: $N, K > 0$ egészek.
Output: Van-e N-nek K-nál kisebb prímosztója?

A fenti két probléma egyikéről sem ismert, hogy $\mathbf{P}$-beliek-e, sem az, hogy $\mathbf{NP}$-teljesek lennének.

Megjegyzés

A Faktorizálásra persze van pszeudopolinomiális algoritmus, tehát ha $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, akkor nem lehet **erősen** $\mathbf{NP}$-teljes; másfelől $\mathrm{co}\mathbf{NP}$-beli is, így ha $\mathbf{NP} \neq \mathrm{co}\mathbf{NP}$, nem lehet $\mathbf{NP}$-teljes.

A co**NP** osztály

Definíció

co**NP** $= \{L : \overline{L} \in \mathbf{NP}\}$

Példák

Érvényesség

Adott: φ Boole-formula

Kérdés: Érvényes-e, azaz azonosan igaz-e φ?

Hamilton-út Komplementer

Adott: G gráf

Kérdés: Igaz-e, hogy G nem tartalmaz Hamilton-utat?

Állítás

Az Érvényesség és Hamilton-út Komplementer problémák co**NP**-ben vannak.

NP és coNP

Egy probléma akkor van

- **NP**-ben, ha minden igen példányához létezik polinom méretű, polinom időben ellenőrizhető bizonyíték, és csak az igen példányokhoz létezik ilyen bizonyíték.
- co**NP**-ben, ha minden nem példányhoz létezik polinom méretű, polinom időben ellenőrizhető cáfolat, és csak a nem példányokhoz létezik ilyen cáfolat.

Állítás

Az Érvényesség és Hamilton-út Komplementer problémák co**NP**-teljesek.

NP és coNP

Állítás

$$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \cap \mathrm{co}\mathbf{NP}.$$

Állítás

Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}$ zárt a visszavezetésre és L $\mathcal{C}$-teljes.
Ekkor $\mathcal{C} = \mathrm{co}\mathcal{C} \Leftrightarrow L \in \mathrm{co}\mathcal{C}$.

Következmény

$$\mathbf{NP} = \mathrm{co}\mathbf{NP} \;\Leftrightarrow\; \textsc{Sat} \in \mathrm{co}\mathbf{NP} \;\Leftrightarrow\; \textsc{Érvényesség} \in \mathbf{NP}.$$

Determinisztikus algoritmusokkal...

- 3SAT eldönthető $\tilde{\mathcal{O}}(1.3303^n)$ időben (Makino, Tamaki, Yamamoto, 2011),
- 3-SZÍNEZÉS eldönthető $\mathcal{O}(1.3289^n)$ időben (Beigel, Eppstein, 2005),
- FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ eldönthető $\mathcal{O}(1.2108^n)$ időben (Robson, 1986 – Fomin, Grandoni, Kratsch 2009),
- ...

Az **Exponenciális Időhipotézis** azt a sejtést fogalmazza meg, hogy a 3SAT-ot (és sok más $\mathbf{NP}$-teljes problémát) nem lehet **szubexponenciális** időben megoldani.

Ez a sejtés erősebb, mint a $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$...

Tárbonyolultság

A futásidő mellett a felhasznált tárterület a másik fontos erőforrás.

Ismét igaz, hogy egy RAM-program esetében ha csak a használt cellák **számát** vennénk alapul, irreálisan alacsony tárigény-fogalomhoz jutnánk.

Cellánként

Egy memóriacella igénye egy adott inputon: a benne a program futása során tárolt **legnagyobb** szám bináris alakjának a **hossza**.
(Azaz $1 + \lfloor \log a \rfloor$, ha ez a maximális érték a, kivéve, ha $a == 0$, mely esetben 1).
PLUSZ a cella **címének** bináris alakjának a hossza.

Példa

Ha a $W[\mathbf{7}]$ regiszterben a program futása során a legnagyobb érték $\mathbf{20}$, akkor ennek a regiszternek a tárigénye 5 (a $20 = 10100_2$ string hossza) plusz 3 (a $7 = 111_2$ string hossza) $= \mathbf{8}$.

Tárbonyolultság

Tárigény egy adott inputon

A teljes program tárigénye egy adott inputon: az összes, a futás során **használt** cella tárigényének összege.

A két memóriamodell

Amint egy cellát megcímez a program (direkt vagy indirekt címzéssel, írásra vagy olvasásra), használtnak minősül.
Kivéve a következő esetet:

- ha a program az **input** regisztereket **csak olvassa**,
- az **output** regiszterekbe pedig **csak ír**, ráadásul stream módban: először $O[1]$ kap értéket, majd $O[2]$, $O[3]$ stb.

akkor az input és output regiszterek tárigényét nem kell bevenni a tárigénybe. (Ez az ún. **„offline”** vagy „lyukszalagos” eset.)
(Ez megfelel annak a memóriamodellnek, mikor a hívó fél biztosítja az I/O területet: az inputot nem írhatjuk át, az outputot pedig egy output stream formájában kapjuk.)

Tárbonyolultság

A program tárigénye

A program tárigénye az $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, ha bármely, legfeljebb n méretű inputon legfeljebb $f(n)$ tárat használ.

A probléma tárigénye

Egy probléma **eldönthető $\mathcal{O}(f(n))$ tárban**, ha van őt eldöntő, $\mathcal{O}(f(n))$ tárigényű program. Ezen problémák osztályát $\textsc{Space}(f(n))$ jelöli.

Példa

$\textsc{Elérhetőség}$ eldönthető **lineáris** tárban:

- a szélességi keresés algoritmusa egy N-csúcsú gráf esetén két, egyenként legfeljebb N méretű csúcshalmazt tárol (a már elért ill. elért és kifejtett csúcsokét), ez pl. N hosszú bitvektor alkalmazásával egy-egy regiszterben $\mathcal{O}(N)$ tárban megoldható.

Alapvető különbség tár és idő közt

A tár újrafelhasználható!

Lineáris tárban...

- ...eldönthető a HAMILTON-ÚT probléma is: ugyanazt a területet újrahasználva generáljuk a csúcsok összes permutációját
- ...eldönthető a $\text{TSP}(E)$ probléma is, hasonlóképp
- ...eldönthető a 3-SZÍNEZÉS probléma is: ugyanazt a területet újrahasználva generáljuk a csúcsok összes 3-színezését
- ...

Megjegyzés

Nem ismert, hogy **NP** és $\text{SPACE}(n)$ közt mi az összefüggés.
Csak annyit tudunk biztosan, hogy $\mathbf{NP} \neq \text{SPACE}(n)$.
(**NP** zárt a visszavezetésre, $\text{SPACE}(n)$ pedig – mint látni fogjuk – nem az.)

Nemdeterminisztikus tárbonyolultság

Nemdeterminisztikus program **idő**bonyolultságát a **leghosszabb** szál hosszaként definiáltuk.

Nemdeterminisztikus program **tárbonyolultságát** egy adott inputon hasonló módon: a **legtöbb tárat használó szál** tárigényeként definiáljuk.

A nemdeterminisztikus program tárbonyolultsága szintén akkor $f(n)$, ha tetszőleges, legfeljebb n méretű inputon legfeljebb $f(n)$ tárat használ.

A nemdeterminisztikus programmal $\mathcal{O}(f(n))$ tárban eldönthető **problémák** osztályát $\mathrm{NSpace}(f(n))$ jelöli.

Nemdeterminisztikus tárbonyolultság

Példa

function ND-ELER($G[1 \ldots N][1 \ldots N]$,$s$,$t$)
  $u := s$
  while $u \neq t$ **do**
    $v :=$ ND$(1 \ldots N)$ //v értéke nemdet. 1 és N közti egész
    if $G[u][v] == 0$ **then return** FALSE
    $u := v$
  return TRUE

Tárigény: nemdeterminisztikus **logaritmikus**: $\mathcal{O}(\log n)$.
Eldönti az ELÉRHETŐSÉG problémát.
(Plusz egy, N-ig menő ciklusszámlálóval a végtelen ciklus elkerülhető, továbbra is logaritmikus tárat használva.)

A nevesített bonyolultsági osztályok

- **R**, **RE** – eldönthető ill. felismerhető problémák
- $\textsc{Time}(f(n))$, $\textsc{NTime}(f(n))$ – det/nemdet. $\mathcal{O}(f(n))$ időben eldönthető problémák
- $\textsc{Space}(f(n))$, $\textsc{NSpace}(f(n))$ – det/nemdet. $\mathcal{O}(f(n))$ tárban eldönthető problémák
- $\mathbf{P} = \textsc{Time}(n^k) = \bigcup_{k \geq 0} \textsc{Time}(n^k)$ – polinomidőben eldönthető problémák
- $\mathbf{NP} = \textsc{NTime}(n^k)$ – nemdet. polinomidőben eldönthető problémák
- $\mathbf{L} = \textsc{Space}(\log n)$ – logaritmikus tárban eldönthető problémák
- $\mathbf{NL} = \textsc{NSpace}(\log n)$ – nemdet. logtárban eldönthetőek
- $\mathbf{PSPACE} = \textsc{Space}(n^k)$ – polinom tárban eldönthetőek
- $\mathbf{NPSPACE} = \textsc{NSpace}(n^k)$ – nemdet. polinom tárban...
- $\mathbf{EXP} = \textsc{Time}(2^{n^k})$...

Alapvető összefüggések

Alapvető összefüggések bonyolultsági osztályok közt

i) $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$, $\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$

ii) $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$

iii) $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(k^{f(n)})$

Ötletek

Az i) pont világos.

Alapvető összefüggések

$\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$

Tehát egy $f(n)$ **idő**korlátos N nemdeterminisztikus programot lehet szimulálni $f^2(n)$ **tár**korlátos determinisztikus programmal.
Feltehetjük, hogy N-nek mindig **pontosan két** választása van megállásig, a 0. és az 1.
A determinisztikus algoritmus:

- Futtatunk egy k számlálót 1-től fölfelé (ennyi lépésig szimuláljuk a nemdeterminisztikus programot).
- k minden értékére leszimuláljuk az összes k hosszú választási sorozatot (ez 2^k darab):
  - ha van köztük elfogadó, elfogadjuk az inputot;
  - ha mind elutasító, elvetjük az inputot;
  - különben növeljük k-t és folytatjuk a ciklust.

(Kimaradt részlet: t utasítás végrehajtása alatt egy RAM program $\mathcal{O}(t^2)$ memóriát használ – ez pl. ismét annak a következménye, hogy a szorzás **nem** elemi művelet, az összeadás nem növelheti „túlzott ütemben" a változók értékét)

$\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$, tovább

A szimulálást a tárterület újrafelhasználásával tesszük (feltehetjük, hogy N offline, így az inputot a szimuláció nem rontja el).
A k. menetben egy k hosszú bitvektorban tartjuk nyilván az aktuális választási sorozatot, ezt növeljük mondjuk binárisan 0-ról indítva.
Mivel $f(n)$ lépésben N is csak $f^2(n)$ tárat használ, a szimulációhoz elég $f^2(n)$ tár; mivel $k \leq f(n)$, a bitvektornak is elég $f(n)$ tár.

Alapvető összefüggések

$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(k^{f(n)})$

Tehát egy $f(n)$ tárkorlátos N nemdeterminisztikus programot akarunk determinisztikusan szimulálni.
Feltehetjük, hogy

- N offline;
- elfogadás előtt közvetlenül kinullázza munkaregisztereit.

Nevezzük **konfigurációnak** a RAM program teljes leírását a számítás egy pillanatában, miután az n hosszú $(a_1, \ldots, a_n)$ inputon elindítjuk:

- a programszámláló értéke: k_1 konstans sok lehetőség
- az összes nemnulla munkaregiszter aktuális tartalma $(i, W[i])$ párok listájának formájában: $\mathcal{O}(f(n))$ bit hosszú lista, $2^{\mathcal{O}(f(n))}$-féle lehetőség

Összesen $k_1 \cdot 2^{\mathcal{O}(f(n))} = k^{f(n)}$ konfiguráció.

Alapvető összefüggések

$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(k^{f(n)})$, tovább

Az adott inputhoz tartozó **konfigurációs gráf**: a konfigurációk a csúcsok, C_1-ből akkor vezet él C_2-be, ha N átléphet C_1-ből C_2-be.
A **determinisztikus** algoritmus: elkészítjük az inputhoz tartozó konfigurációs gráfot és azon lineáris időben megoldunk egy ELÉRHETŐSÉG problémát a kezdőkonfigurációból a (kinullázás miatt egyértelmű) elfogadó konfigurációba.
(A gráfot nem kell előre elkészítenünk és letárolnunk, on-the-fly is számíthatjuk.)

Megjegyzés

Az eddigiekből $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(k^{f^2(n)})$, de
$\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(k^{f(n)})$ is igaz.

A „nevesített” osztályok sorrendje

Következmény

$$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{EXP} (\subsetneq \mathbf{R})$$

Bizonyítás

$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL}$ (i)

$\mathbf{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log n) \subseteq \mathrm{TIME}(k^{\log n}) \subseteq \mathbf{P}$ (iii)

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ (i)

$\mathbf{NP} = \mathrm{NTIME}(n^k) \subseteq \mathrm{SPACE}(n^k) = \mathbf{PSPACE}$ (ii)

$\mathbf{PSPACE} = \mathrm{SPACE}(n^k) \subseteq \mathrm{TIME}(2^{n^k}) = \mathbf{EXP}$ (iii)

A **központi** kérdés, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vagy sem, de a fentiek közül **egyiket** se tudjuk, hogy egyenlőség-e!

A hierarchia tételek

Megengedett függvények

Az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton növő függvény **megengedett**, ha létezik olyan program, ami az $1^n \mapsto 1^{f(n)}$ függvényt számítja ki (n darab egyesből $f(n)$ darab egyest készít) $\mathcal{O}(f(n))$ tárban és $\mathcal{O}(n + f(n))$ időben.

Időhierarchia tétel

Ha $f(n) > n$ megengedett függvény, akkor

$$\mathrm{TIME}\Big(o\big(\frac{f(n)}{\log f(n)}\big)\Big) \subsetneq \mathrm{TIME}(f(n)).$$

Emiatt pl. $\mathbf{P} \neq \mathbf{EXP}$.

Tárhierarchia tétel

Ha $f(n) > \log n$ megengedett függvény, akkor

$$\mathrm{SPACE}\Big(o(f(n))\Big) \subsetneq \mathrm{SPACE}(f(n)).$$

Emiatt pl. $\mathbf{L} \neq \mathbf{PSPACE}$.

Savitch tétele

Egy algoritmus

- Input: irányított gráf, mondjuk $G[1..N][1..N]$ szomszédsági mátrixával
- Output: ?

function $\textsc{f}(x, y, d)$
  if $d == 0$ **then return** $(x == y)$ OR $G[x][y]$;
  for $z = 1 \dots N$ **do**
    if $\textsc{f}(x, z, d-1)$ AND $\textsc{f}(z, y, d-1)$ **then return** TRUE
  return FALSE
return $\textsc{f}(1, N, \lceil \log N \rceil)$;

Savitch tétele

A függvény

Az $f(x, y, d)$ hívás pontosan akkor ad TRUE-t, ha a G gráfban van x-ből y-ba legfeljebb 2^d hosszú út.

- $d == 0$: legfeljebb egy hosszú út, vagyis $x == y$ vagy van él x-ből y-ba;
- $d > 0$: ha van x-ből y-ba egy legfeljebb 2^d hosszú út, akkor ennek felezőpontjába, z-be van x-ből egy legfeljebb 2^{d-1} hosszú út és z-ből y-ba is, ez akkor teljesül, ha $f(x, z, d-1)$ és $f(z, y, d-1)$ is TRUE-val tér vissza.

A belépési pont

Az $f(1, N, \lceil \log N \rceil)$ hívás tehát akkor ad TRUE-t, ha van legfeljebb $2^{\lceil \log N \rceil} \geq N$ hosszú **út 1-ből N-be**, vagyis egy (determinisztikus) algoritmus az ELÉRHETŐSÉG problémára.

Savitch tétele

Tárigény

- Az f függvény egy példányának tárigénye $\mathcal{O}(\log n)$, hisz csak az x, y, d, z változókat deklarálja, mindegyik $0 \ldots N$ közti értéket vesz fel;
- a hívási verem mélysége $\lceil \log N \rceil = \mathcal{O}(\log n)$, legfeljebb ennyi példánya van egyszerre f-nek a memóriában;

tehát a teljes tárigény $\mathcal{O}(\log^2 n)$.

Ezzel beláttuk Savitch tételét:

Tétel

$$\textsc{Elérhetőség} \in \mathrm{SPACE}(\log^2 n).$$

Következmény

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n)),$$

ha $f(n) \geq \log n$.

Ötlet

Az ELÉRHETŐSÉG problémát a nemdeterminisztikus program **konfigurációs gráfján** oldjuk meg.

Következmény

$$\mathbf{PSPACE} = \mathbf{NPSPACE}.$$

Következmény

$$\mathbf{NL} \subsetneq \mathbf{PSPACE}.$$

(Hiszen $\mathbf{NL} \subseteq \mathrm{SPACE}(\log^2 n) \subsetneq \mathrm{SPACE}(n)$ Savitch tétele és a tárhierarchia tétel szerint.)

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nemdeterminisztikus algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \dots N][1 \dots N]$ szomszédsági mátrixával.

function Út(s, t, d)
  $i := s$;
  while $d \geq 0$ **do**
    if $i == t$ **then return** Accept
    $j := \mathrm{nd}(N)$;
    if NOT $G[i][j]$ **then return** Reject
    $i := j$;
    $d := d - 1$;

- A függvény visszaad**hat** Accept-et, ha s-ből t d lépésen belül elérhető.
- Egyébként mindenképp Reject-et ad vissza.
- Tárigény: $\mathcal{O}(\log n)$.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nemdeterminisztikus algoritmust hívó algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \dots N][1 \dots N]$ szomszédsági mátrixával.

function T-IN-SK$(s, t, prev, k)$
  $check := 0$;
  for $u := 1 \dots N$ **do**
    if ÚT$(s, u, k-1)$ **then**
      $check := check + 1$;
      if $G[u][t]$ **then return** ACCEPT
  if $check == prev$ **then return** REJECT
  THROW ERROR;

- **Ha** $prev$ az s-ből legfeljebb $k-1$ lépésben elérhető csúcsok száma, akkor:
- ha s-ből t legfeljebb k lépésben elérhető, akkor az eredmény ACCEPT vagy ERROR, lehet ACCEPT;
- ha nem, akkor az eredmény REJECT vagy ERROR, lehet REJECT.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nd algoritmust hívó algoritmust hívó algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \dots N][1 \dots N]$ szomszédsági mátrixával és s csúcsa.

$prev := 1;$
for $k := 1 \dots N$ **do**
  $current := 0;$
  for $t := 1 \dots N$ **do**
    if T-IN-SK$(s, t, prev, k)$ **then**
      $current := current + 1;$
  $prev := current;$
return $prev;$

- Az algoritmus visszaadja az s-ből elérhető csúcsok számát, vagy ERROR-t dob; van, mikor a számot adja vissza.
- Mindezt logaritmikus tárigényben.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Beláttuk az Immerman-Szelepcsényi tételt:

Tétel

Van olyan **nemdeterminisztikus** algoritmus, mely **logaritmikus tárban** kiszámítja az input gráf megadott csúcsából elérhető csúcsok számát.

Nemdeterminisztikus függvénykiszámítás: minden szálon vagy a helyes eredményt adja vissza, vagy REJECT-et; továbbá van olyan szál, mikor a helyes eredményt.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Következmény

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \;=\; \mathrm{coNSPACE}(f(n)),$$

ha $f(n) \geq \log n$.

Ötlet

A konfigurációs gráfban először nd kiszámítjuk az elérhető konfigurációk számát, aztán nd mindet megpróbáljuk elérni. Ha annyit értünk el, amennyi csak elérhető és egyik sem elfogadó, akkor Accept, különben Reject.

Következmény

$$\mathbf{NL} \;=\; \mathrm{co}\mathbf{NL}.$$

A logaritmikus tárban való visszavezetés

A polinomidejű visszavezetésre nézve $\mathbf{P}$ minden nemtriviális eleme „$\mathbf{P}$-teljes”. Bevezetünk egy (formailag) „gyengébb” visszavezetést, melyet a $\mathbf{P}$ osztályon belül alkalmazunk problémák egymáshoz viszonyított nehézségének definiálására.

Az f függvény az A eldöntési problémának a B eldöntési problémára való **logaritmikus tárigényű** visszavezetése, ha

- f kiszámítható logaritmikus tárban és
- tetszőleges I inputra $A(I) = B(f(I))$.

Ha létezik A-nak B-re való logaritmikus tárigényű visszavezetése, annak jele $\mathbf{A} \leq_{\mathcal{L}} \mathbf{B}$: A logtárban visszavezethető B-re.

A logtáras visszavezetés

Logaritmikus tárigényű (tehát mindenképp offline) algoritmusnak legfeljebb $2^{\mathcal{O}(\log n)}$, azaz polinom sok konfigurációja lehet adott input esetén;mivel a visszavezetés nem eshet végtelen ciklusba, így polinomidőben meg is kell álljon.

Vagyis ha $\mathrm{A} \leq_{\mathcal{L}} \mathrm{B}$, akkor $\mathrm{A} \leq_{\mathcal{P}} \mathrm{B}$ is.

Megjegyzés

Nem ismert, hogy $\leq_{\mathcal{L}}$ és $\leq_{\mathcal{P}}$ egybeesnek-e. . . (ha igen, akkor $\mathbf{L} = \mathbf{P}$)

Nehézség, teljesség

Legyen $\mathcal{C}$ problémák egy osztálya. Az A probléma **$\mathcal{C}$-nehéz** a logtáras visszavezetésre nézve, ha minden $\mathcal{C}$-beli probléma logtárban visszavezethető A-ra. Ha még $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$ is, akkor A egy $\mathcal{C}$-teljes probléma a logtáras visszavezetésre nézve.

Megjegyzés

Nem ismert, hogy a logtáras visszavezetésre nézve $\mathbf{NP}$-teljes problémák ugyanazok-e, mint a polinomidejű visszavezetésre nézve $\mathbf{NP}$-teljesek.
(A Sat egy $\mathbf{NP}$-teljes probléma a logtáras visszavezetésre nézve is; az összes hatékony visszavezetés, melyet eddig láttunk, egyben logtáras is volt.)

A logtáras visszavezetés tranzitivitása

Tétel

A logtárban való visszavezethetőség tranzitív: ha f az A-nak B-re, g pedig a B-nek C-re való logtáras visszavezetése, akkor az $f \circ g$ összetett függvény az A-nak C-re való logtáras visszavezetése.

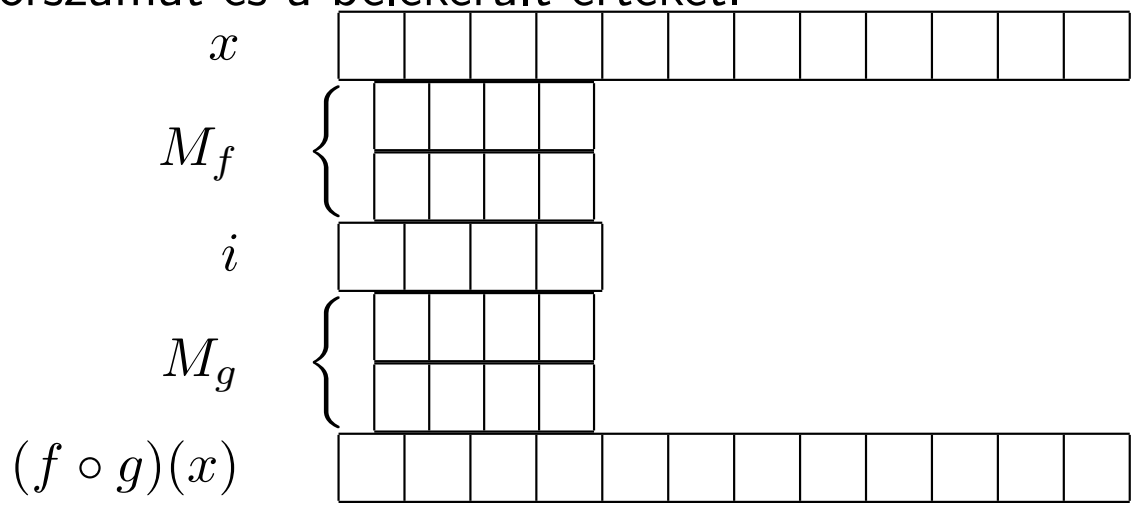
A gond

Legyen M_f az f-et, M_g pedig a g-t kiszámító program.
Az nyilván igaz, hogy $I \in A \Leftrightarrow f(I) \in B \Leftrightarrow g(f(I)) \in C$.
Csakhogy ha $M_f(I)$-t munkaregiszterekbe írjuk, sokkal hosszabb lehet, mint $\log(|I|)$!

A visszavezetés tranzitivitása

A trükk

Nem tároljuk el M_f teljes outputját, csak a legutolsóként írt output regiszter sorszámát és a belekerült értéket.



M_g-nek szüksége van egy nagyobb sorszámú regiszter tartalmára: folytatjuk M_f szimulálását.

M_g-nek szüksége van egy kisebb sorszámú regiszter tartalmára: elölről kezdjük M_f szimulálását.

$\mathbf{P}$-teljesség, $\mathbf{NL}$-teljesség

Korábban láttuk, hogy $\mathbf{P}$ (így $\mathbf{NL}$) bármely két nemtriviális problémája hatékonyan visszavezethető egymásra, így a polinomidejű visszavezetésre nézve ezen osztályokon belül a „teljesség” fogalma értelmetlenné válik.

Azt mondjuk, hogy egy probléma $\mathbf{NL}$/$\mathbf{P}$-teljes/nehéz, ha a **logtáras** visszavezetésre nézve az.

Tétel

A Hálózat-Kiértékelés probléma $\mathbf{P}$-teljes.

Az Elérhetőség probléma **NL**-teljessége

Tétel

Az Elérhetőség probléma **NL**-teljes.

Ötlet

Azt már láttuk, hogy Elérhetőség $\in \mathbf{NL}$.
Az **NL**-nehézséghez mint korábban, az **elérhetőségi módszert** alkalmazzuk: egy nemdeterminisztikus, $\mathcal{O}(\log n)$ tárkorlátos gép konfigurációs gráfjában megoldva az elérhetőségi problémát a kezdőkonfigurációtól az elfogadóig, készen vagyunk.

Következmény

Az Elérhetetlenség probléma **NL**-teljes.

Hiszen az Immerman-Szelepcsényi tétel szerint $\mathbf{NL} = \mathrm{co}\mathbf{NL}$.

Tétel

A 2SAT probléma **NL**-teljes.

Ötlet

Azt már tudjuk, hogy $2\text{SAT} \in \mathbf{NL}$. Tekintsük az ELÉRHETETLENSÉG egy példányát. Minden csúcshoz rendeljünk egy x változót. A 2SAT azon φ példányát készítjük el, mely az összes $\neg x \vee y$ tagokból áll, ahol (x, y) él, továbbá az s és $\neg t$ tagokból, ahol s a kezdőcsúcs és t a cél.
Így φ kielégíthető $\Leftrightarrow$ s-ből nem érhető el t.

Emiatt a 2SAT komplementere is **NL**-teljes.

A polinomiális tár

QSAT

Adott: $\exists x_1 \forall x_2 \ldots Q_m x_m \varphi$ kvantifikált Boole-formula prenex normálalakban úgy, hogy a φ konjunktív normálalakú kvantormentes formula, melyben legfeljebb az $x_1, \ldots, x_m$ változók fordulnak elő.

Kérdés: Igaz-e az adott formula?

Megjegyzés

- A kvantorok szigorú alternálása nem lényeges.
- Az sem lényeges, hogy az első kvantor $\exists$.

QSAT példa

Példa

$$\exists x\ \forall y(\ (x \vee y)\ \wedge\ (\neg x \vee \neg y)\ )$$

hamis, hiszen $x = 0$ esetén $y = 0$, $x = 1$ esetén pedig $y = 1$ választása mellett hamis lesz a formula magja.

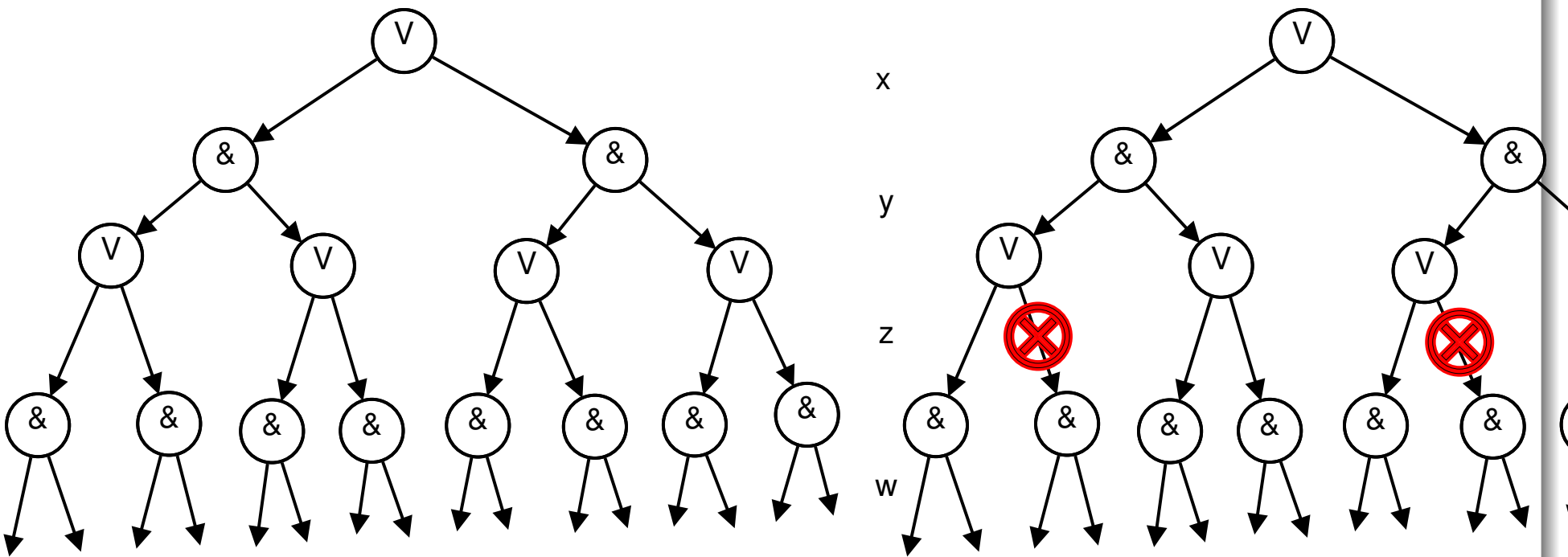
Példa

$$\exists x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\big((\neg x \vee z \vee w)\ \wedge\ (y \vee \neg z)\ \wedge\ (x \vee \neg y \vee z)\big)$$

?

A hosszabb példa

$$\exists x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\Big((\neg x \vee z \vee w)\ \wedge\ (y \vee \neg z)\ \wedge\ (x \vee \neg y \vee z)\Big)$$



A formula **igaz**: $x = 0$ választása esetén tetszőleges y-ra legyen $z = y$, ekkor a formula minden w-re igaz lesz.

Állítás

A QSAT probléma **PSPACE**-ben van.

Algoritmus

Bemenet: $Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \varphi$ alakú zárt formula.
Kimenet: a formula értéke.

function $\text{QSAT}(F)$
  if $F == \exists x F'$ **then**
    return $\text{QSAT}(F'[x/0])$ or $\text{QSAT}(F'[x/1])$
  else if $F == \forall x F'$ **then**
    return $\text{QSAT}(F'[x/0])$ and $\text{QSAT}(F'[x/1])$
  else
    return $\text{EVAL}(F)$

Ez az algoritmus $\mathcal{O}(n^2)$ tárban kiszámítja a formula értékét (ahol EVAL a változómentes formulát polinom időben és lineáris tárban kiértékelő függvény).

QSAT

Megjegyzés

A probléma akkor is **PSPACE**-ben van, ha

- φ tetszőleges kvantormentes Boole-formula.
- a kvantorok nem feltétlenül váltakoznak.
- φ-ben az $x_1, \ldots, x_m$ változókon kívül egyéb változók is előfordulnak, és azt kérdezzük, kielégíthető-e az egész formula.
- a formula nem feltétlenül prenex alakú.
- azt kérdezzük, hogy a formula hamis-e.

QSAT

Tétel

A QSAT probléma **PSPACE**-teljes.

Ötlet

- Egy tetszőleges n^k tárkorlátos M programhoz és x inputjához konstruálunk egy φ formulát, mely pontosan akkor igaz, ha M elfogadja x-et.
- Egy konfigurációt n^k darab bináris változóval kódolunk.
- Tetszőleges t-re a φ_t formulát, aminek szabad változói $x_1, \ldots, x_{n^k}, y_1, \ldots, y_{n^k}$, úgy konstruáljuk meg, hogy $\varphi_t(x_1, \ldots, x_{n^k}, y_1, \ldots, y_{n^k})$ pontosan akkor igaz, ha az $(x_1, \ldots, x_{n^k})$ konfigurációból az M program **2^t lépésen belül** az $(y_1, \ldots, y_{n^k})$ konfigurációba jut; továbbá φ_t „nem túl hosszú".
- A keresett formula: φ_{n^k}, behelyettesítve a kezdő- és az elfogadó konfigurációt.

$\varphi_{t+1}\big(x_1, \ldots, x_{n^k}, y_1, \ldots, y_{n^k}\big)$

Jelölje X az $x_1, \ldots, x_{n^k}$ változó-vektort, Y az $y_1, \ldots, y_{n^k}$-t stb.
A Savitch-tételben látottal analóg módon:

$$\exists Z\big(\varphi_t(X, Z) \wedge \varphi_t(Z, Y)\big),$$

de ez túl hosszú! (Exponenciális hosszú formula.)
Ehelyett:

$$\exists Z \forall X', Y'\Big(\big((X' = X \wedge Y' = Z) \vee (X' = Z \wedge Y' = Y)\big) \to \varphi_t(X', Y')\Big),$$

ahol $A = B$ az $(a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge \ldots \wedge (a_{n^k} \leftrightarrow b_{n^k})$ formula rövidítése.
A formula magja (polinom méretű) CNF-re is könnyen hozható.

További **PSPACE**-teljes problémák

Helyben Elfogadás

Adott: M determinisztikus program és x bemenő szó.

Kérdés: Elfogadja-e M az x-et legfeljebb $|x|$ tárban?

Reguláris Kifejezések Ekvivalenciája

Adott: Két reguláris kifejezés.

Kérdés: Ugyanazt a nyelvet jelölik-e?

Véges Automaták Ekvivalenciája

Adott: M_1 és M_2 véges **nemdeterminisztikus** automaták.

Kérdés: M_1 és M_2 ekvivalensek-e?

Tétel

A fenti három probléma mind **PSPACE**-teljes.

Készülődés a **PSPACE** egy meglepő karakterizációjára

Alternálás

Visszatérünk még a **PSPACE**-re, de előbb bevezetünk egy fogalmat, az **alternálást**.

Alternáló program

Definíció

Az **alternáló program** olyan program, melyben (a nemdeterminisztikushoz hasonlóan) egy sorszámot több sornak is kioszthatunk, **továbbá** minden sorszám vagy ÉS, vagy VAGY típusú sorszám.
Tekintsük a program számítási fáját az x bemeneten.
Azt mondjuk, hogy egy C konfiguráció **végül elfogadó**, ha

- C-ben a gép ACCEPT soron áll, vagy
- ÉS-sorszámon van, és **minden** közvetlen leszármazottja végül elfogadó, vagy
- VAGY-sorszámon van, és **valamely** közvetlen leszármazottja végül elfogadó.

A program akkor **fogadja el** az x bemenetet, ha a kezdő konfiguráció végül elfogadó, különben elutasítja azt. Az $f(n)$ idő- vagy tárkorlátos alternáló program fogalmát értelemszerűen definiáljuk.

Alternáló program

Definíció

Legyen $f(n)$ megengedett bonyolultsági függvény. (Idő esetén $f(n) > n$.)
$\mathbf{ATIME}(f(n))$: az összes $f(n)$ időkorlátos alternáló programmal eldönthető nyelvek.
$\mathbf{ASPACE}(f(n))$: az összes $f(n)$ tárkorlátos alternáló programmal eldönthető nyelvek.
AL$= \mathrm{ASPACE}(\log n)$
AP$= \mathrm{ATIME}(n^k)$

Világos, hogy $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{ATIME}(f(n))$ és $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{ASPACE}(f(n))$.

Hiszen a nemdeterminisztikus program olyan alternáló program, melynek csak VAGY típusú sorai vannak.

Alternálás és determinizmus

Az alternáló bonyolultsági osztályok és a „klasszikus” bonyolultsági osztályok közt érdekes összefüggések állnak fenn:

Tétel

$$\mathbf{AL} = \mathbf{P}.$$

Tétel

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PSPACE}.$$

Az utóbbi tételt megfogalmazhatjuk így is:
PSPACE-be pontosan azok a problémák tartoznak, melyek reprezentálhatók zéró összegű, teljes információs, polinom lépésszámú kétszemélyes játékként.

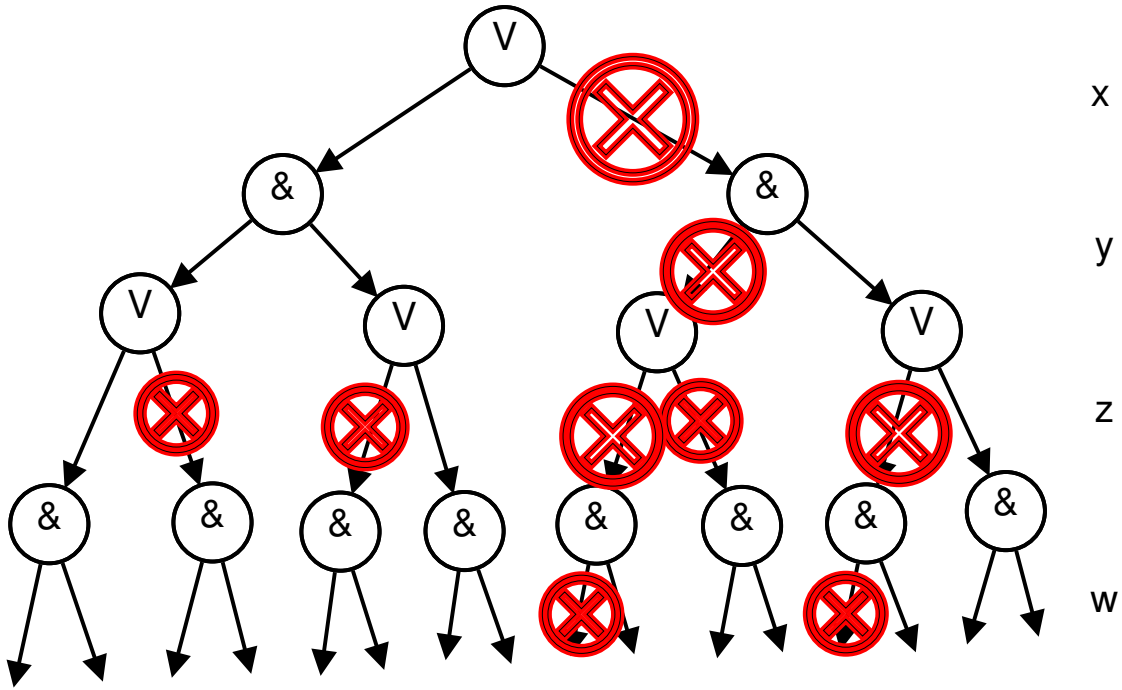
Kétszemélyes játékok

A QSAT felfogható **kétszemélyes játékként**:

- Játékosok: $\exists$, $\forall$
- Lépések felváltva: x_1 értéke, x_2 értéke, ...
- $\exists$ célja: kielégíteni a formula magját
- $\forall$ célja: hamissá tenni

A hosszabb példa

$$\exists x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\Big((\neg x \vee z \vee w)\ \wedge\ (y \vee \neg z)\ \wedge\ (x \vee \neg y \vee z)\Big)$$



„A formula **igaz**: $x = 0$ választása esetén tetszőleges y-ra legyen $z = y$ és az minden w-re jó lesz.”
Egy nyerő stratégia $\exists$-nek: válassza $x = 0$-t, majd $\forall$ választja y értékét, $\exists$ ugyenezt az értéket adja z-nek, $\forall$ bárhogy is választja meg w értékét, a formula magja igaz lesz.

Egy kétszemélyes játék

Földrajzi Játék

Adott: $G = (V, E)$ irányított gráf, $1 \in V$ kezdőcsúcs.

Kérdés: Az I. játékos nyer-e az alábbi játékban?

- Az I. játékos kezd az 1 csúcs megnevezésével.
- Minden lépésben minden játékosnak egy olyan csúcsot kell választani, amely még nem szerepelt, és amelybe vezet él az előzőleg megnevezett csúcsból.
- Egy játékos veszít, ha végül nem tud ilyen csúcsot megnevezni.

Állítás

A Földrajzi Játék probléma **PSPACE**-ben van.

Ötlet

- A lépéssorozatok hossza a bemenet méretében polinomiális.
- Létezik olyan polinom tárigényű algoritmus, mely adott állásra megkonstruálja az állás rákövetkezőit, vagy ha ilyen nincs, eldönti, melyik játékos nyert.

Minden ilyen kétszemélyes játék **PSPACE**-ben van:

- Polinom tárral elkészítjük az adott játék fáját.
- Mélységgel arányos tárral eldöntjük, kinek van nyerő stratégiája.

A két algoritmus összetehető: polinom tárkorlát.

Állítás

A Földrajzi Játék probléma **PSPACE**-teljes.

$$\exists x \forall y \exists z \forall u \big(\ (y \vee \neg x) \wedge (y \vee z) \wedge (\neg y \vee u) \wedge (\neg x \vee \neg y) \big)$$

TODO

- Az első játékos dönti el az egzisztenciálisan, a második az univerzálisan kvantifikált változó értékét, mely a címkével ellentétes.
- A második játékos választ egy tagot.
- Az első játékos akkor és csak akkor nyer, ha a tag valamely literálja igaz (visszavezető él választható).
- Mivel ez minden tagra igaz, az első játékos nyer $\Leftrightarrow$ a formula igaz.

Megjegyzés

Irányítatlan gráfok esetén a probléma $\mathbf{P}$-ben van.

További közismert **PSPACE**-teljes problémák

- Gó: input egy gó állás, melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Hex: input egy hex állás, melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Reversi: input egy reversi állás...
- Dáma: input egy dámaállás...
- Amőba: egy amőbaállás...
- Sokoban: megoldható-e az input Sokoban feladvány? (egyszemélyes!)
- Rush Hour: megoldható-e az input Rush Hour feladvány?
- Életjáték: kipusztul-e minden cella egy adott kezdőállásból elindítva valahány lépésben? („nulla személyes”!)

Túl a **PSPACE** osztályon

Definíció

$\mathbf{EXP} = \mathrm{TIME}(2^{n^k})$
$\mathbf{NEXP} = \mathrm{NTIME}(2^{n^k})$

Világos, hogy $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{NEXP}$ és tudjuk, hogy $\mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{EXP}$.
Nem ismert, hogy az $\mathbf{EXP}$ és $\mathbf{NEXP}$ osztályok megegyeznek-e.

Tétel

Ha $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, akkor $\mathbf{EXP} = \mathbf{NEXP}$.

Definíció

$\mathbf{EXPSPACE} = \mathrm{SPACE}(2^{n^k})$

Világos, hogy $\mathbf{NEXP} \subseteq \mathbf{EXPSPACE}$.

Tétel

Az alábbi probléma $\mathbf{EXPSPACE}$-teljes: adott két reguláris kifejezés, melyekben négyzetreemelés is szerepelhet, ekvivalensek-e a kifejezések?

Definíció

$\mathbf{ELEMI} = \mathrm{TIME}(2^{n^k}) \cup \mathrm{TIME}(2^{2^{n^k}}) \cup \mathrm{TIME}(2^{2^{2^{n^k}}}) \cup \ldots$

Tétel

Az alábbi eldönthető probléma **nem elemi**: adott két reguláris kifejezés, melyekben komplementerképzés is szerepelhet, ekvivalensek-e a kifejezések?

TODO

A Cobham–Edmonds tézis, még egyszer

Egy problémát akkor tekintünk **gyakorlatilag megoldhatónak**, ha van rá polinom időigényű algoritmus.

Biztos?

Vannak esetek, mikor a **lineáris** időigény is **soknak** bizonyul...
...de a RAM-gépes kiszámítási modellben nem értelmezhető szublineáris időigény.

A hatékony párhuzamosítás kérdése azonban gyakorlati szempontból lényeges, így szükség van olyan kiszámítási modellre, melyben pl. $\mathcal{O}(\log n)$-es időigény is értelmezhető.

Az elméleti párhuzamos számítógép

PRAM

Parallel, random-access machine.

- osztott memória
- sok (de „csak” polinom sok) processzor
- minden processzor a memória bármelyik bitjét $\mathcal{O}(1)$ időben eléri
- a konfliktusok kezelésének módja (EREW, CREW, CRCW) nem rögzített, de nem is lényeges igazán

A matematikai modell

PRAM gépek helyett **logikai hálózatcsaláddal** fogjuk (ekvivalensen) definiálni a hatékony párhuzamosíthatóság fogalmát.

Hálózatcsaláddal való eldöntés

Hálózatcsalád

Hálózatcsaládon logikai hálózatoknak egy $\mathcal{C} = C_0, C_1, \ldots$ sorozatát értjük, ahol minden i-re C_i olyan logikai hálózat, melynek input kapuinak címkéje az $\{x_1, \ldots, x_i\}$ halmazba esik.

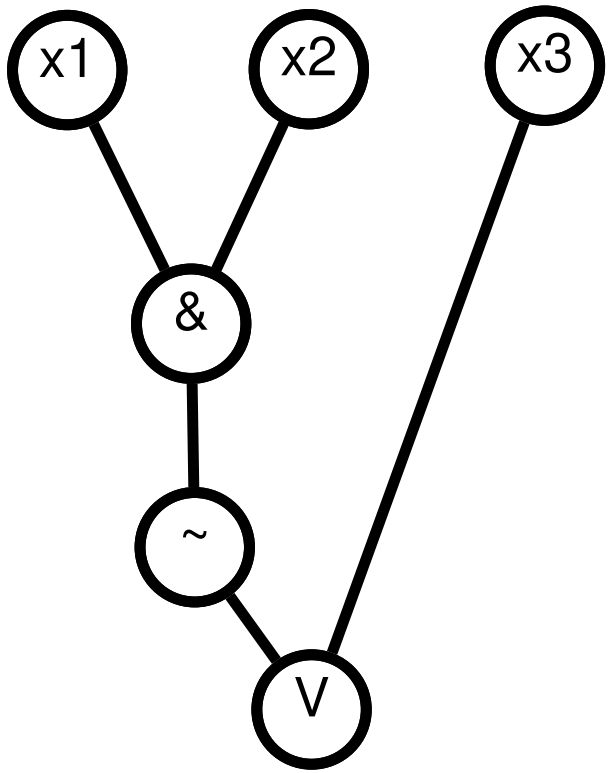
Eldöntés

A $\mathcal{C} = C_0, C_1, \ldots$ hálózatcsalád **elfogadja** az $x = b_1 b_2 \ldots b_n \in \{0,1\}^*$ szót, ha $C_n(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$.
A $\mathcal{C}$ **által eldöntött** $\boldsymbol{L(\mathcal{C}) \subseteq \{0,1\}^*}$ **nyelvet** a $\mathcal{C}$ által elfogadott szavak alkotják.

Példa

Elfogadás, elvetés

Ha C_3 a következő hálózat:

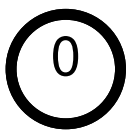


akkor $\mathcal{C} = C_0, \ldots, C_3, \ldots$ elfogadja a 001, 010 szavakat és elveti az 110-t.

Példa

$(01)^*$-ot eldöntő hálózatcsalád

- C_0 : 

- C_{2i+1}: 

- C_{2i+2}:

TODO

Korlátok

Hálózatcsaláddal **minden** nyelv eldönthető (mert minden Boole-függvényhez van őt reprezentáló hálózat), így megszorításokat teszünk az „elfogadható” hálózatcsaládra n függvényében

- a C_n-beli **kapuk száma** szerint,
- a C_n hálózat **mélysége** szerint,
- a hálózatcsalád tagjaiban megengedett **kaputípusok szerint**,
- **uniformitás** szerint (egy hálózatcsalád akkor (logtár-)uniform, ha van olyan algoritmus, mely C_n-t előállítja $\mathcal{O}(\log n)$ tár felhasználása mellett).

A hatékonyan párhuzamosítható problémák osztálya

Definíció

Ha $k \geq 0$ konstans, akkor az $\boldsymbol{NC^k}$ **osztályba** azok a $\{0,1\}$ fölötti nyelvek tartoznak, melyek eldönthetők

- valamely c konstansra $\mathcal{O}(n^c)$, vagyis polinom sok kaput tartalmazó,
- $\mathcal{O}(\log^k n)$ mélységű,
- legfeljebb kettő befokú kapukat tartalmazó,
- uniform

hálózatcsaláddal.
$\boldsymbol{NC} = \bigcup_{k \geq 0} \boldsymbol{NC^k}$, a **hatékonyan párhuzamosítható** problémák osztálya.

NC^1: logaritmikus mélységű hálózatcsalád

Példa: 1^n

Az 1^* nyelv eldönthető logaritmikus mélységű hálózattal: C_n az input kapukat $\wedge$ kapukkal köti össze, egy majdnem teljes bináris fába szervezett topológiával. Pl. C_{10} :

TODO

Függvények kiszámítása

Több output kapu

Hálózatcsaládokkal **függvényeket** is kiszámíthatunk: ha a $\mathcal{C} = C_0, C_1, \ldots$ családban a C_n tagnak o_n kimeneti kapuval rendelkezik (rögzített sorrendben), akkor a család értelemszerűen kiszámít egy $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ függvényt; az n hosszú input szavakhoz o_n hosszú output szót rendel.

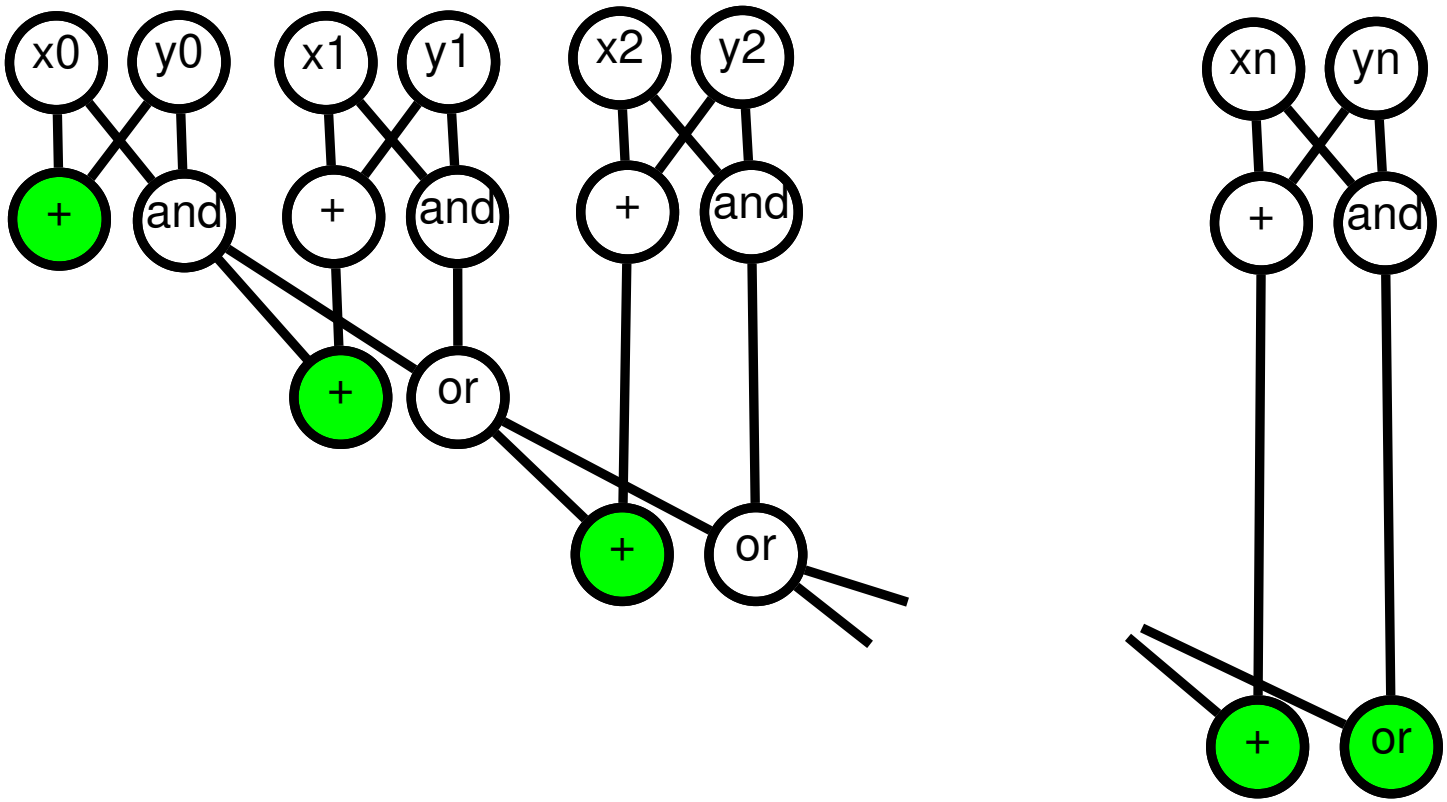
Összeadó hálózatok

Összeadás

Összeadás: a C_n hálózat **input kapui** az $x_0, \ldots, x_{n-1}$, $y_0, \ldots, y_{n-1}$ változókkal címkézettek, output kapui $z_0, \ldots, z_n$.
A bemeneti két n-bites szám összegét (egy $n+1$-bites számot) kell a kimenetre küldenie.

Összeadó hálózatok

Triviális megvalósítás



Lineáris mélység!

Összeadás logaritmikus mélységben

Elég kiszámítani a carry biteket ($c_i = 1$, ha az i. helyiértéken keletkezik átvitel, vagyis ha az $x_0 x_1 \dots x_{n-1} + y_0 y_1 \dots y_{i-1}$ összeg i. helyiértéke 1-es.
Ezek után $\boldsymbol{z_i = x_i \oplus y_i \oplus c_{i-1}}$, ahol $\oplus$ a kizáró vagy művelet (összeadás $\mathbb{Z}_2$-ben).
(pontosabban, $z_n = c_{n-1}$ és $z_0 = x_0 \oplus y_0$.)
Ez párhuzamosan, konstans mélységben elvégezhető.

Összeadás logaritmikus mélységben

Carry és propagate

Adott $x_0 \dots x_{n-1}$ és $y_0 \dots y_{n-1}$ input egészek, bitsorozat formájában és $0 \leq i \leq j \leq n$. Legyen

- $c_{i,j} = 1$, ha az $x_i x_{i+1} \dots x_j + y_i y_{i+1} \dots y_j$ összegnél keletkezik carry;
- $p_{i,j} = 1$, ha az $x_i x_{i+1} \dots x_j + y_i y_{i+1} \dots y_j + \mathbf{1}$ összegnél keletkezik carry.

Összefüggések

- $c_{i,i} = x_i \ \wedge \ y_i$.
- $p_{i,i} = x_i \ \vee \ y_i$.
- $c_{i,i+2d} = (c_{i,i+d} \wedge p_{i+d+1,i+2d}) \vee c_{i+d+1,i+2d}$.
- $p_{i,i+2d} = p_{i,i+d} \wedge p_{i+d+1,i+2d}$.

Ezekkel az összefüggésekkel $\mathcal{O}(\log n)$ mélységben kiszámítható a carry és a propagate az összes $(0, j)$ párra.

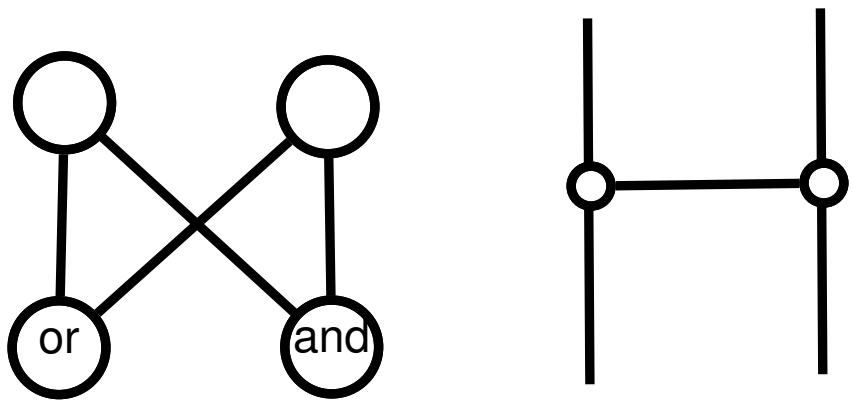
Rendezés $\mathcal{O}(\log^2 n)$ mélységben

A páros-páratlan mergesort (Batcher)

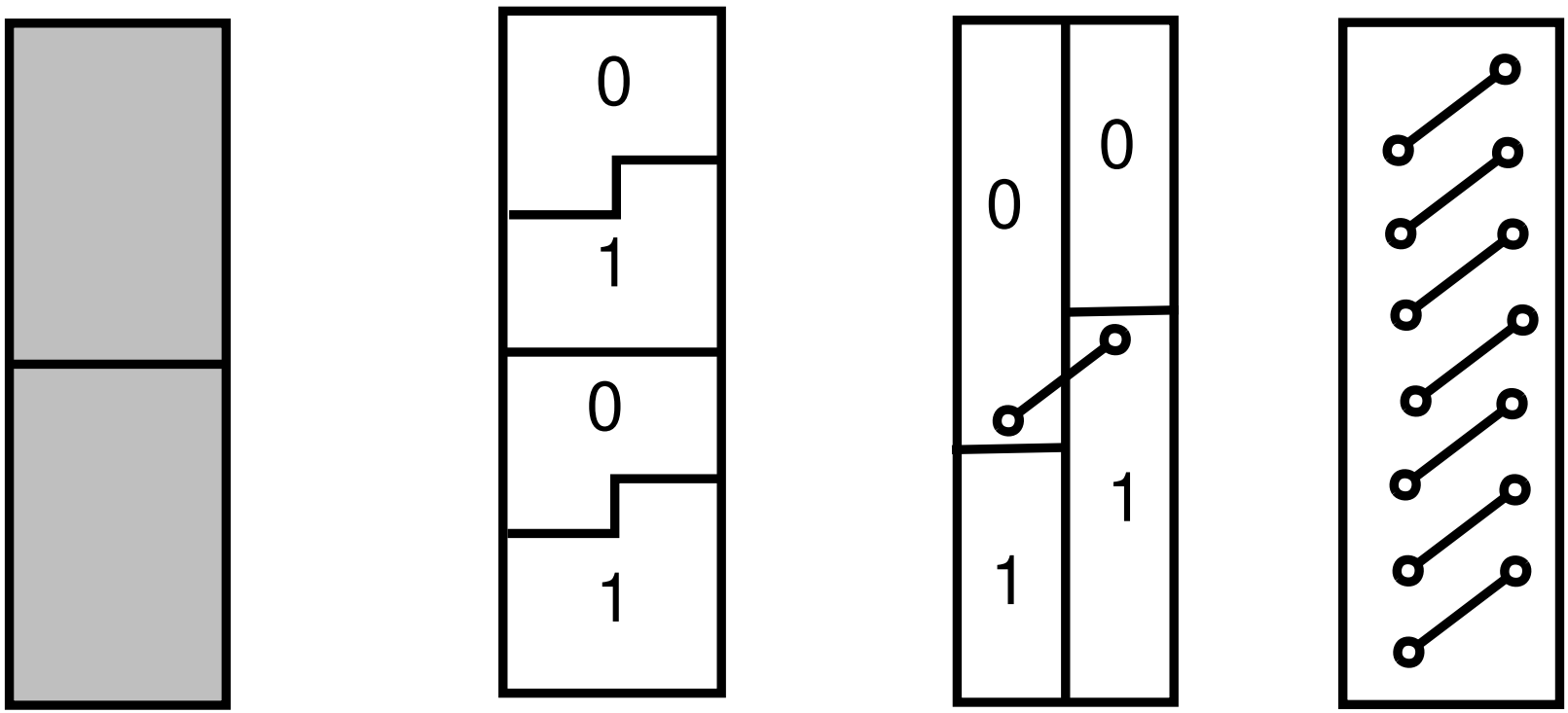
function MERGE($T[1..2N]$)
  if $N == 1$ **then** compareAndSwap($T[1], T[2]$)
  else
    MERGE($T[1, 3, 5, \ldots, 2N-1]$)
    MERGE($T[2, 4, 6, \ldots, 2N]$)
    for $i = 2, 4, 6, \ldots, 2N-2$ **do** compareAndSwap($T[i], T[i+1]$)

function SORT($T[1..2N]$)
  if $N == 1$ **then** compareAndSwap($T[1], T[2]$)
  else
    SORT($T[1..N]$)
    SORT($T[N+1..2N]$)
    MERGE($T[1..2N]$)

compareAndSwap



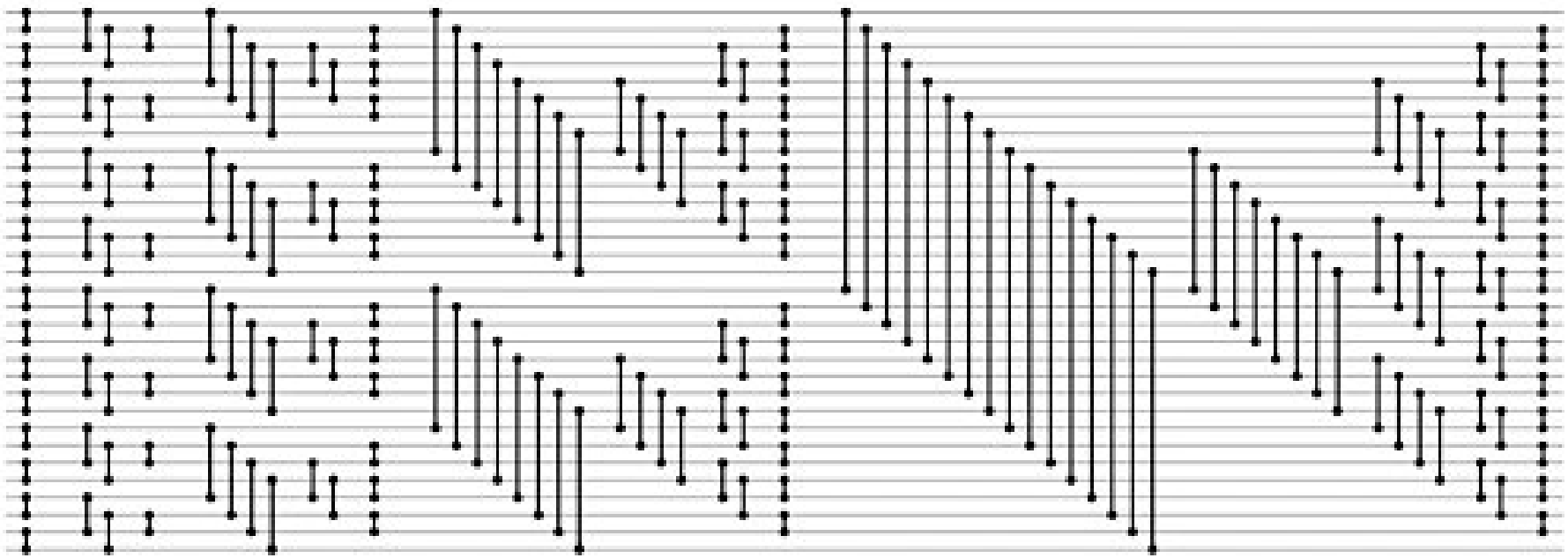
A páros-páratlan mergesort vizualizálva



Rendezés $\mathcal{O}(\log^2 n)$ mélységben

A teljes rendező hálózat mélysége: $\mathcal{O}(\log^2 n)$.

Példa: 32-bites rendező hálózat



Többségi Függvény $\in \boldsymbol{NC}^2$

A Többségi Függvény akkor vesz fel 1 értéket, ha argumentumainak legalább a fele 1-es.

A függvény az előzőek szerint $\boldsymbol{NC}^2$-beli:

- rendezzük a biteket;
- visszaadjuk az $\frac{n}{2}$. elemet a rendezett sorozatból.

Mátrixszorzás: $\mathcal{O}(\log n)$ mélység

Az input kapuk: két $n \times n$-es Boole-mátrix elemei, $x_{i,j}$ ill. $y_{i,j}$ a megfelelő mátrix $i.$ sorának, $j.$ oszlopának értéke
Az output kapuk: $z_{i,j}$, a két mátrix szorzatának $i.$ sorának $j.$ oszlopának értéke

$$z_{i,j} = \bigvee_{k=1}^{n} (x_{i,k} \wedge y_{k,j}).$$

$\log n$ mélység

- Minden (i, k, j) hármasra kiszámítjuk az $x_{i,k} \wedge y_{k,j}$ értéket párhuzamosan: 1 mélység, n^3 kapu.
- Minden (i, j) párosra a fenti $z_{i,j}$ értéket párhuzamosan: $\log n$ mélység (az 1^n-nél látott majdnem teljes bináris fa topológiával), összesen n^3 kapu.

Vagyis: $\mathcal{O}(\log n)$ mélység, polinom sok kapu.

Elérhetőség $\in NC^2$

- Legyen $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ a G gráf szomszédsági mátrixa.
- $A + I$: a főátlót 1-re állítjuk.
- $(A + I)^k$: az (i, j) cella értéke pontosan akkor 1, ha van legfeljebb k hosszú séta i-ből j-be.
- Iterált négyzetreemeléssel meghatározzuk $(A + I)^{2^{\lceil \log n \rceil}}$-t, majd ennek visszaadjuk az $(1, n)$ celláját.
- Egy négyzetreemelés: $\mathcal{O}(\log n)$ mélység.
- $\log n$ négyzetreemelés szekvenciálisan.
- Összesen $\mathcal{O}(\log^2 n)$ mélység.

Az $\boldsymbol{NC}$ osztályok a klasszikusak közt

Tétel

$$\boldsymbol{NC}^1 \subseteq \boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{NL} \subseteq \boldsymbol{NC}^2 \subseteq \boldsymbol{NC}^3 \subseteq \ldots \subseteq \boldsymbol{NC} \subseteq \mathbf{P}.$$

Nem ismert, hogy

- igaz-e, hogy $\boldsymbol{NC}^i = \boldsymbol{NC}^{i+1}$ valamely i-re?
- $\boldsymbol{NC}^1$ vs. $\boldsymbol{L}$?
- $\boldsymbol{NC}^1$ vs. $\boldsymbol{NL}$?
- $\boldsymbol{NC}^2$ vs. $\boldsymbol{NL}$?
- $\boldsymbol{NC}$ **vs.** $\mathbf{P}$?

Az utolsó kérdés másképp: igaz-e, hogy minden hatékonyan megoldható ($\mathbf{P}$-beli) probléma hatékonyan párhuzamosítható is, vagy vannak „inherensen szekvenciális" problémák?

Alapfeladat

- Alice üzenetet akar küldeni Bobnak



- Chuck ne ismerhesse meg az üzenet tartalmát a hálózat lehallgatásával
- Megegyeznek két **algoritmusban**, E – kódoló és D – dekódoló és két **kulcsban**, $e \in \{0,1\}^*$ és $d \in \{0,1\}^*$
- Oly módon, hogy tetszőleges $x \in \{0,1\}^*$ üzenetre $D(d, E(e, x)) = x$ legyen
- Továbbá, D és E legyen hatékonyan kiszámítható
- Viszont $E(e, x)$-ből d nélkül x ne legyen visszanyerhető

One-time pad

D és E

- A D, E algoritmusokról feltesszük, hogy Chuck ismeri őket
- Csak a kulcsokat nem ismeri (míg azok át nem mennek a hálózaton titkosítatlanul. . .)

One-time pad

Ha $d = e$ egy (véletlenül generált) $n = |x|$-bites szám, $E = D$ pedig a bitenkénti Xor művelet, ez teljesíti az előbbi elvárásokat

Csakhogy

- a kulcsot csak egyetlen üzenet titkosítására használhatjuk
- a kulcsot mindkét félnek ismernie kell (**szimmetrikus** titkosítás)

A kulcs titkosított átküldésének problémája pedig (most) ekvivalens az eredeti feladattal.

Publikus kulcsú titkosítások

- Ha az e titkosító kulcs **mindenki** számára ismert, d pedig **csak Bob** számára,
- és e-ből d-t vagy $E(e, x)$-ből x-et **gyakorlatilag** nem lehet d ismerete nélkül kiszámítani,

akkor nyilvános kulcsú titkosításról beszélünk.

„Gyakorlatilag”

- Az One-Time Pad elméletileg is feltörhetetlen.
- A publikus kulcsú titkosítások azonban **nem** azok:
- Ha Chuck ismeri $y = E(e, x)$-et és E-t, akkor **nemdeterminisztikusan** megsejtve x-et tudja ellenőrizni, hogy eltalálta-e, hiszen e számára is ismert
- Ez tehát $\mathbf{FNP}$-beli probléma $\Rightarrow$ abban az extrém esetben, ha $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, minden ilyen rendszer polinomidőben törhető

Egyirányú függvények

Egy f (parciális) **injektív** függvény **egyirányú**, ha

- minden x-re $f(x)$ legfeljebb polinomiálisan hosszabb/rövidebb x-nél;
- f kiszámítható polinomidőben;
- f^{-1} nem számítható ki polinomidőben.

Nyilván az inverz mindenképpen $\mathbf{FNP}$-beli (megsejtjük, ellenőrizzük).

Ha a titkosító algoritmus egyirányú függvénnyel történik, akkor a kulcs ismerete nélkül nem lehet visszaállítani az inputot.

Egyirányú függvény – **jelöltek**

Prímek szorzása

- Input: $p < q$ prímek
- Output: $p \cdot q$

A függvény nyilván injektív, polinomidőben kiszámítható és **jelen állás szerint** nem ismert, hogy inverze kiszámítható lenne polinomidőben.

Moduláris hatványozás

- Input: p prím, r **primitív gyöke**, $0 < x < p$ egész
- Output: $r^x \mathrm{mod} p$.

Mivel r primitív gyök, a függvény injektív; mivel van iterált moduláris hatványozás, polinomidőben kiszámítható, és **jelen állás szerint** nem ismert, hogy inverze kiszámítható lenne polinomidőben.

RSA

Adott: p, q prímszámok, e szám úgy, hogy $\boldsymbol{e}$ **és** $\boldsymbol{\Phi(pq) = (p-1)(q-1)}$ **relatív prímek**.

- Input: $0 \leq x < pq$ szám
- Output: $x^e \bmod pq$

A függvény **injektív**, ha e és $\Phi(pq)$ tényleg relatív prímek, polinomidejű (ismét iterált moduláris hatványozás miatt), és szintén nem ismert, hogy inverze polinomidőben kiszámítható lenne.

Publikus kulcsú titkosításként

- Bob generál p, q prímeket, és egy e számot, ami relatív prím $\Phi(pq)$-hoz
- Bob kiszámítja azt a d számot, amire $e \cdot d \equiv 1 \bmod \Phi(pq)$
- Publikus: pq és e
- Privát: d

Trapdoor függvények

Ha az egyirányú függvénnyel elkódolt üzenetet Bob sem tudja semmivel hatékonyan visszafejteni, az nem túl hasznos.
Ezért az f egyirányú függvényre további megszorításokat teszünk:
Ha még az is igaz, hogy

- az f értelmezési tartományából **hatékonyan vehetünk mintát** és
- létezik olyan d függvény, melynek ismeretében f^{-1} kiszámítása hatékony,

akkor f egy trapdoor (csapda-)függvény.

Az RSA **talán** trapdoor függvény, ezért alkalmas publikus kulcsú titkosításra (a prímszorzás és a moduláris hatványozás önmagukban nem azok).

UP

Egy probléma akkor van az $\mathbf{UP}$ osztályban, ha eldönthető olyan polinomidejű **nemdeterminisztikus** A programmal, mely

- a „nem” példányokat minden szálon elveti,
- az „igen” példányokat **pontosan egy** szálon fogadja el.

(vessük össze: $\mathbf{RP}$-nél pont hogy **sok** elfogadó szálat kötöttünk ki.)

Nyilván $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{UP} \subseteq \mathbf{NP}$.

Például $\textsc{Faktorizálás} \in \mathbf{UP}$.

Tétel

$\mathbf{P} \neq \mathbf{UP}$ pontosan akkor, **ha van egyirányú függvény**.

„Quantum mechanics: Real Black Magic Calculus."
– Albert Einstein, 1925

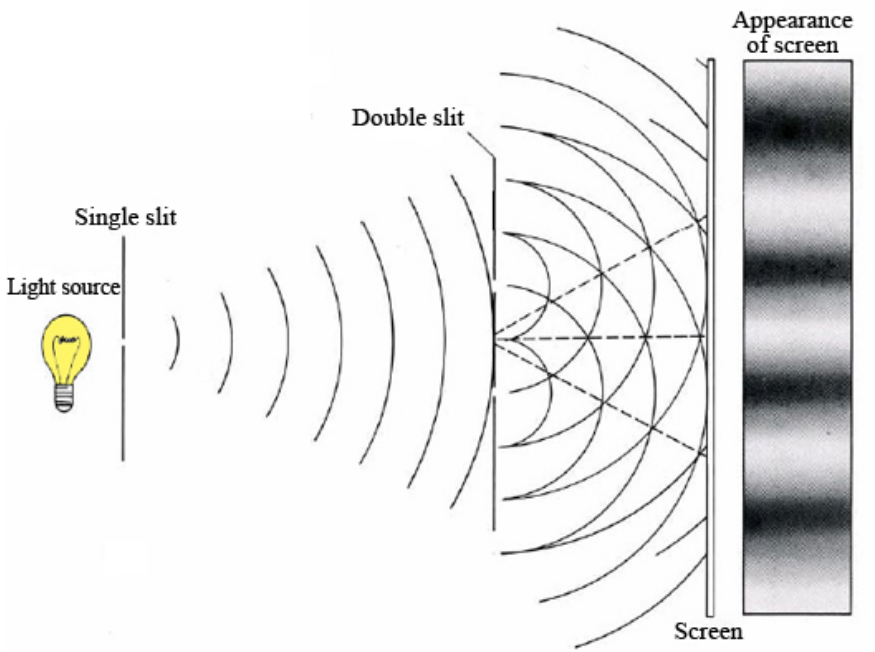
„God does not play dice with the universe."
– Albert Einstein

„Not only does God play dice but... he sometimes throws them where they cannot be seen."
– Stephen Hawking

Mottó

„How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics."
– Sir James Jeans

A kétrés kísérlet: hullám, mérés, részecske



Hullámtermészet? Csakhogy...

- **Egyetlen** foton is interferál.
- Ha **detektort** teszünk valamelyik résbe, az interferencia megszűnik. (Vagy ha lecsukjuk valamelyik rést.)
- Ha **egyszerre** csak egy rést hagyunk nyitva és a becsapódási pozícióból nem számítható ki, hogy melyik résen „kellett" áthaladjon, akkor **interferál**.

Szuperpozíció

Akkor...

- Egy foton (elektron, macska...) egyszerre több lehetséges állapot **szuperpozíciójában** van...
  - „melyik rés felé ment”
  - „életben van vagy elpusztult”
- ...amíg meg nem mérjük (ekkor **összeomlik** a hullámfüggvény és beáll **egy** állapotba).
  - ha a réshez teszünk detektort, ott omlik össze és nem lesz interferencia
  - ha az ernyőhöz, akkor csak ott és lesz interferencia

Kvantum összefonódás (entanglement)

Amit lehet tenni

- Fotonokat gyártani vízszintes vagy függőleges polarizáltsággal
- Megmérve ezeket 50-50%-ban gyártjuk
- Egy fotonból **két összefonódottat** gyártani (prizmával)
- Összefonódottak: ha megmérjük mindkettő polarizáltságát, **ugyanazt** kapjuk
- Akkor is, ha a két mérés közt annyi idő telik el, ami a fénysebességnek is kevés, hogy „átadja" az információt

Einstein

„Spooky action at a distance" – ilyen nem lehet
Akkor a polarizáltság már **benne van** a részecskében, „rejtett" módon

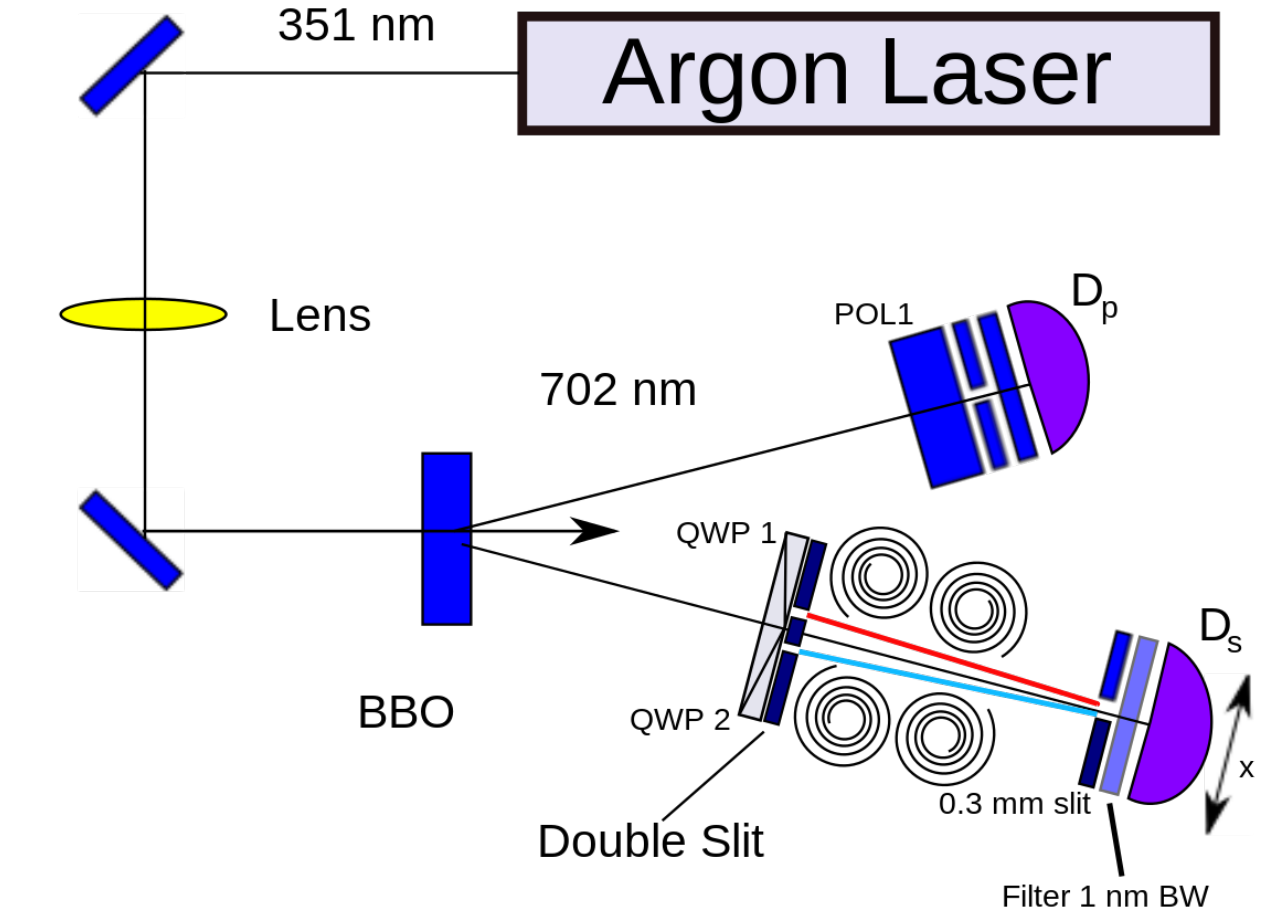
Kvantum összefonódás (entanglement)

Bell

- Engedjük át mindkét fotont egy-egy $\Theta = 45°$-os **polarizátoron** és nézzük meg, ugyanaz történik-e velük
- Tudjuk: ha a polarizátor szöge Θ az eredeti polarizáláshoz képest, azt a polarizátor $\cos^2 \Theta = 0.5$ részben engedi át
- . . . tehát a $0°$-ost is és a $90°$-ost is 0.5 részben engedné át mindkét oldal, függetlenül, akkor 0.5 kellene legyen azon részecske-párok aránya, melyekkel ugyanaz történik

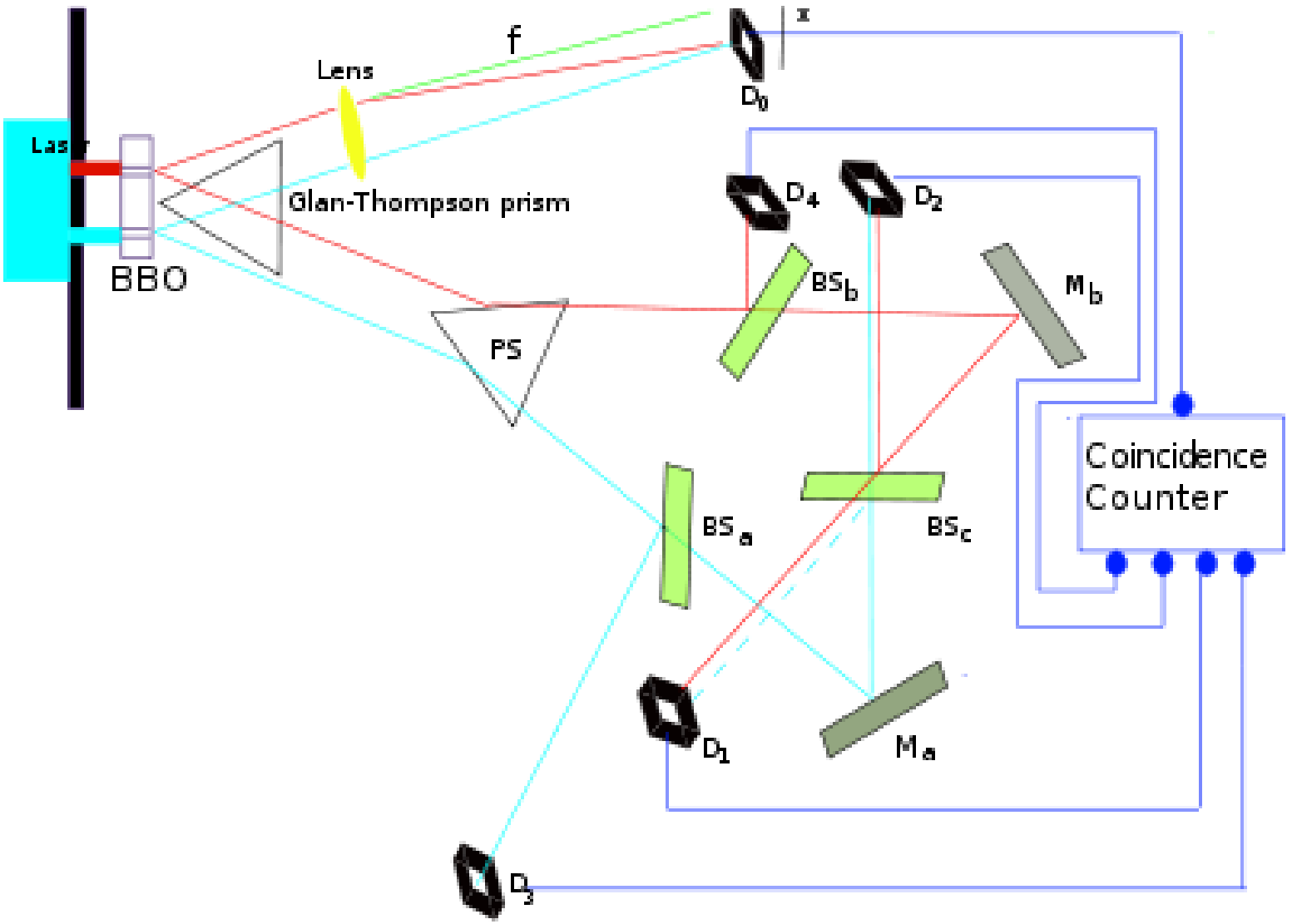
DE NEM ANNYI
hanem **minddel ugyanaz történik**. Spooky.

Kvantumradír



Walborn, Cunha, Padua, and Monken, Double slit quantum eraser experiment with polarizer (POL1) present. In this configuration, interference is detected at D_S.

Delayed choice quantum eraser, 2000



Hullámtermészet, összeomlás, összefonódás

A kísérletek szerint

- A rendszer az összes lehetséges állapot egy **szuperpozíciójában van**...
- ...amíg rá nem mérünk...
- ...akkor össze is omlik a hullámfüggvény és „beáll” a mérés eredményére...
- ...egyszerre az Univerzum összes összefonódott kvantumjában
- ...kivéve, ha a mérés eredményét garantáltan „kiradírozzuk”, akkor nem is omlik össze.

Érteni ugyan nem értjük, **miért**, de elég érdekesnek látszik ahhoz, hogy jó ötletnek tűnjön **számítógépet építeni** belőle.

D-Wave Systems

Építeni?

- Eddig $7 - 10$ **qubites** rendszereket sikerült minden kutatócsoportnak építenie...
- ...kivéve a kanadai D-Wave Systemst,
- akik eladtak a Google-nak és a NASA-nak egy 512-qubites rendszert 2013-ban, miután a Lockheed Martinnak egy 128-qubitest 2011-ben
- amely rendszerekről „jelenleg nem világos, hogy i) történik-e bennük kvantum-jellegű számítás és ii) ha igen, attól gyorsabb-e a rendszer egyáltalán, mint egy laptop

Lássuk a matekot.

Valószínűségi amplitúdók

A hullámtermészetből eredő **fázis** modellezéséhez kevés, ha a 0 állapothoz egy p_0, az 1 állapothoz egy p_1 **valószínűséget** rendelünk.

Szuperpozíció

Ehelyett a 0 állapothoz egy α_0, az 1 állapothoz egy α_1 **amplitúdót** rendelünk:

- α_0, α_1 komplex számok
- **méréskor** 0-t $|\alpha_0|^2$, 1-et pedig $|\alpha_1|^2$ valószínűséggel kapunk
- ennek megfelelően $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$ kell legyen
- mérés során a hullámfüggvény **összeomlik**: $\alpha_i = 1$ lesz, ha a mérés eredménye i (α_{1-i} pedig 0)

Technikai jelölés: $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ (ez a (α_0, α_1) értékű **qubit**)

Több qubites rendszer állapotai

Ha a rendszerben **két** qubit van, akkor egy mérés eredménye lehet $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ vagy $|11\rangle$

Összefonódás!

(Általában) nem kezelhetjük függetlennek az egyes qubitek amplitúdóit
Pl. ha a két qubit **összefonódott**, akkor a mérés eredménye vagy $|00\rangle$, vagy $|11\rangle$ lehet csak

Több qubites rendszer állapotai

Megoldás

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle,$$

- $\sum_{u \in \mathbf{2}^2} |\alpha_u|^2 = 1$
- $|u\rangle$ mérésének valószínűsége $|\alpha_u|^2$
- $|u\rangle$-t mérve a rendszer ténylegesen beáll az $|u\rangle$ állapotba

Még több qubit

Ha a qubitek száma n, az egy $\mathbf{2^n}$**-tagú** formális összeg

$$|\psi\rangle = \sum_{u \in \mathbf{2}^n} \alpha_u |u\rangle, \quad \sum |\alpha_u|^2 = 1;$$

ez 500 qubit esetén 2^{500} darab komplex szám!

Tenzor szorzat

A $|0\rangle = (1,0)$ és $|1\rangle = (0,1)$ azonosítással a $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ állapot épp a $|\psi\rangle = (\alpha_0, \alpha_1)$ alakot ölti

Továbbmenve, $|00\rangle = (1,0,0,0)$, $|01\rangle = (0,1,0,0)$, $|10\rangle = (0,0,1,0)$ és $|11\rangle = (0,0,0,1)$ adná, hogy

$$\sum_{u \in \mathbf{2}^2} \alpha_u |u\rangle = (\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}).$$

Vektorok tenzor szorzata

Legyen $u = (a_1, \ldots, a_n)$ és $v = (b_1, \ldots, b_k)$. Akkor

$$u \otimes v = (a_1 b_1, a_1 b_2, \ldots, a_1 b_k, a_2 b_1, \ldots, a_n b_k)$$

a két vektor **tenzor** szorzata.
(mint $(a_1 v, a_2 v, \ldots, a_n v)$, „elhagyva a zárójeleket")

Miért jó a tenzor szorzat

Asszociatív

$$u \otimes (v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$$

Konzisztens a ket-jelöléssel

$|u\rangle \otimes |v\rangle = |uv\rangle$, ha $u \in \mathbf{2}^n, v \in \mathbf{2}^k$

Szuperpozíciók tenzor-szorzata szuperpozíció

Ha $|\psi\rangle = \sum_{u \in \mathbf{2}^n} \alpha_u |u\rangle$ és $|\varphi\rangle = \sum_{v \in \mathbf{2}^k} \beta_v |v\rangle$ úgy, hogy $\sum |\alpha_u|^2 = \sum |\beta_v|^2 = 1$, akkor

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = \sum_{uv \in \mathbf{2}^{n+k}} \alpha_u \beta_v |uv\rangle,$$

és $\sum |\alpha_u \beta_v|^2 = 1$.

Unitér transzformációk

Unitér mátrixok

Egy A négyzetes mátrix **unitér**, ha a konjugált transzponáltja az inverze

Példák

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ezek éppen valós mátrixok, ekkor unitér = ortonormált.

Miért?

A kvantummechanika második posztulátuma

Zárt kvantumrendszer fejlődése unitér transzformációval írható le:
Tetszőleges t_1, t_2 időpontokhoz létezik egy U unitér operátor, melyre ha a rendszer t_1-ben a $|\psi\rangle$ állapotban van, akkor t_2-ben $U|\psi\rangle$-ben.

Avagy: a Schrödinger-egyenlet

Zárt kvantumrendszer fejlődése unitér transzformációval írható le: létezik **egy** H Hermite-mátrix, amire

$$i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle.$$

Bitváltás, fázisváltás

$X|0\rangle$, $X|1\rangle$ – bitváltás

$$X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

és hasonlóan, $X|1\rangle = |0\rangle$.
Általában $X(\alpha_0, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_0)$.

$Z|0\rangle$, $Z|1\rangle$ – fázisváltás

$$Z|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle,$$

de

$$Z|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle!$$

Általában $Z(\alpha_0, \alpha_1) = (\alpha_0, -\alpha_1)$.

Hadamard keverés – szuperpozíció létrehozása

$H|0\rangle$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Tehát egy qubitet $|0\rangle$-ra inicializálva, majd a H Hadamard-transzformációt alkalmazva rajta az $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ állapotba kerül a qubit; ezt $50-50\%$-kal mérjük $|0\rangle$-nak ill. $|1\rangle$-nek

Klasszikus áramkörök kvantumgépen

Klasszikus, $f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ (pl. logikai áramkörökkel megvalósított) függvényeket is szeretnénk kvantumszámításunk során használni (pl. mikor a feladat épp az, hogy f egy zérushelyét keressük)

A probléma

A klasszikus kapuk **nem mind invertálhatóak**! Az unitér transzformációk viszont igen.

A megoldás

Kiegészítő qubiteket alkalmazunk: a T Toffoli kapura (mátrixra) igaz, hogy

$$T|a\rangle|b\rangle|c\rangle = |a\rangle|b\rangle|c \text{ xor } (a \wedge b)\rangle.$$

Ha $a \text{ nand } b$-t akarjuk kiszámítani, akkor a c qubitet $|1\rangle$-gyel inicializálva, majd $|abc\rangle$-t T-vel transzformálva c éppen az $a \text{ nand } b$ állapotba kerül.

Klasszikus áramkörök kvantumgépen

Nincs kész!

A hagyományos áramkörökben nem gond az output **másolása**.

A no-cloning tétel

Nincs olyan U unitér mátrix és $|\varphi\rangle$ állapot, melyre

$$U(|\psi\rangle|\varphi\rangle) = |\psi\rangle|\psi\rangle$$

teljesülne minden $|\psi\rangle$ állapotra.

Klasszikus eset

Klasszikus biteket tudunk Toffoli kapuval másolni:

$$T|1\rangle|a\rangle|0\rangle = |1\rangle|a\rangle|a\rangle.$$

Függvények

A Toffoli-kapuhoz hasonló elven tetszőleges $f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ függvény szimulálható egy

$$U_f : |b_1 \dots b_n\rangle|c\rangle \mapsto |b_1 \dots b_n\rangle|c \text{ xor } f(b_1, \dots, b_n)\rangle$$

kvantum áramkörrel.

Függvénykiszámítás egyszerre minden lehetséges inputra

Hadamard-keverés

- Inicializáljuk az n-qubites rendszerünket a $|000\ldots0\rangle$ állapotban.
- Minden qubiten hajtsuk végre a H Hadamard-transzformációt.

Ekkor a kapott állapot:

$$\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \ldots \otimes \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

vagyis $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{u \in \mathbf{2}^n} |u\rangle$, tökéletes szuperpozíció.

Mérés?

Ha most mérnénk, minden u állapot azonos valószínűséggel állna be.
Ez nem túl hasznos. (Ugyanaz, mint a random beállítás.)

Függvénykiszámítás egyszerre minden lehetséges inputra

Hadamard-keverés + U_f

Alkalmazzuk a Hadamard-keverés után az U_f áramkört a rendszeren, a $|00\ldots0\rangle$ állapotból indítva?

Az eredmény ...

$$\frac{1}{\sqrt{2}^n} \sum_{u \in \mathbf{2}^n} |u\rangle |f(u)\rangle.$$

Mérés?

Ha most mérnénk, egy $|u\rangle|f(u)\rangle$ alakú állapotba állna be a rendszer, minden u-ra azonos valószínűséggel.
Ez sem túl hasznos. (Ugyanaz, mint egy random helyen kiértékelés.)

A „jó” függvényértékek fázisának változtatása

U_f, ismét

$$U_f(|u\rangle|c\rangle) = |u\rangle|c + f(u)\rangle.$$

Felfoghatjuk úgy is, hogy **ha $\boldsymbol{f(u) = 0}$**, akkor c nem változik, ha $f(u) = 1$, akkor bitváltás történik.

Inicializálva az U_f kimeneti qubitjét $H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$-vel...

- ha $f(u) = 0$: marad $H|1\rangle$
- ha $f(u) = 1$: **$-\boldsymbol{H}|\mathbf{1}\rangle$ lesz**

Azaz:

$$|u\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \mapsto |u\rangle(-1)^{f(u)} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

A továbbiakban a $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ konstanst elhagyjuk:

$$|u\rangle \mapsto (-1)^{f(u)}|u\rangle.$$

Grover keverés

$|0\ldots0\rangle$-ra tükrözés...

Vegyük a következő (unitér) operátort:

$$P(|u\rangle) = \begin{cases} |u\rangle & \text{, ha } u = 0\ldots0; \\ -|u\rangle & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

(Az operátor megvalósítható $O(n)$ kvantum kapuval.)

...kétoldali Hadamard-keveréssel

Ha a $D = HPH$ transzformációt tekintjük, kiírással igazolható, hogy

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n}) = (2\mu - \alpha_1, 2\mu - \alpha_2, \ldots, 2\mu - \alpha_{2^n}),$$

ahol $\mu = \sum \frac{\alpha_i}{2^n}$ az amplitúdók **átlaga**.

Tehát D végrehajtása egy „átlag körüli inverzió".

Előbb U_f, majd D

M darab „jó" u vektor (melyekre $f(u) = 1$) esetén

- ha $|\psi\rangle$ az uniform szuperpozíció és $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n - M}} \sum_{u \text{ rossz}} |u\rangle$ a rossz vektorok uniform szuperpozíciója, akkor:

  U_f egy tükrözés $|\alpha\rangle$-ra,
  D pedig egy tükrözés $|\psi\rangle$-re,

  ezek eredménye pedig egy forgatás a két vektor síkjában!
- Mégpedig, ha $|\psi\rangle$ és $|\alpha\rangle$ bezárt szöge Θ, akkor 2Θ-val való forgatás.
- Ha ezt a forgatást $\approx \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2^n}{M}}$-szer ismételjük, akkor a kapott vektor $|\alpha\rangle$-val (tehát a „rossz" vektorok alterével) bezárt szöge közel $\frac{\pi}{2}$ lesz
- **Ekkor** mérve tehát jó eséllyel **nem** a rossz vektorok közül kapunk egyet.

Grover keresés

Összefoglalva: van olyan kvantumalgoritmus, mely az f függvényt csak $O(\sqrt{2^n})$-szer meghívva, nagy valószínűséggel ad egy olyan $u \in \mathbf{2}^n$-t, melyre $f(u) = 1$.

Ez bizonyíthatóan **jobb**, mint egy klasszikus valószínűségi algoritmus (ott $o(2^n)$ hívás nem ad konstans valószínűséggel jó eredményt, ha pl $M = 1$)

Ha az **összes** jó vektort meg akarjuk határozni: $O(\sqrt{M2^n})$.

Ezek a korlátok (ebben a kvantumszámítási modellben) aszimptotikusan **optimálisak** is.

Közel az 1 valószínűséghez

A valószínűség javítása

ϵ megnövelése: $\log n$ számú iterált végrehajtással

A Grover keresés egy-egy f hívása mellé még $O(\log n)$ egyéb kvantum-kapu műveletet végez

Done.