

Közelítő és szimbolikus számítások haladóknak

7. előadás

Lineáris egyenletrendszerek megoldása iterációval, relaxációs módszerek

Mátrixok reguláris szétvágásai

Definíció. Az A mátrix egy reguláris szétvágásán,
 A -nak egy

$$A=RS$$

alakban való felbontását értjük, ahol R reguláris mátrix.

A továbbiakban feltesszük, hogy A erősen reguláris mátrix, vagyis olyan reguláris mátrix, amelynek a főátlójában nincs 0.

Ekvivalens átalakítás

Alapötlet: A kiindulási

$$Ax=a$$

lineáris egyenletrendszert ekvivalens módon hozzuk

$$x=Bx+b$$

alakra. Ebből a célból tekintsük a kiinduló egyenletrendszer A együtthatómátrixának egy R - S alakú reguláris szétvágását.

Ekvivalens átalakítás

$$Ax = a$$

$$(A = R - S)$$

$$(R - S)x = a$$

$$Rx = Sx + a$$

$$x = R^{-1}Sx + R^{-1}a$$

Ekvivalens átalakítás

$$x = R^{-1}Sx + R^{-1}a \quad B = R^{-1}S$$

$$x = Bx + b \quad b = R^{-1}a$$

R és S meghatározását az $A=D-L-U$ alakú előállításban szereplő D diagonális, L alsó trianguláris és U felső trianguláris mátrixok segítségével határozzuk meg.

$$A=D-L-U$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobi-iteráció

Tekintsük az

$$R=D, S=L+U$$

reguláris szétvágást. Ekkor

$$B_J = D^{-1}(L+U)$$

$$b_J = D^{-1}a$$

Iterációs formula:

$$x_n = D^{-1}(L+U)x_{n-1} + D^{-1}a$$

Gauss-Seidel-iteráció

Tekintsük az

$$R=D-L, S=U$$

reguláris szétvágást. Ekkor

$$B_S = (D - L)^{-1}U$$

$$b_S = (D - L)^{-1}a$$

Iterációs formula:

$$x_n = (D - L)^{-1}Ux_{n-1} + (D - L)^{-1}a$$

Gyakorlati számítások

Jacobi-iteráció:

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k - a_i \right)$$

Gauss-Seidel-iteráció:

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k - a_i \right)$$

Relaxációs módszerek

Relaxációs paraméter

$$A=D-L-U$$

$$A = \frac{1}{\omega} D - \left(L + U + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) D \right)$$

$\omega > 0$ valós paraméter, az ún. relaxációs paraméter

Jacobi-féle relaxációs módszer

- A Jacobi-iteráció kiterjesztése.

Tekintsük az

$$R = \frac{1}{\omega} D$$

$$S = L + U + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) D$$

reguláris szétvágást.

Jacobi-féle relaxációs módszer

$$B_{J(\omega)} = \omega D^{-1} \left(L + U + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) D \right)$$

$$b_{J(\omega)} = \omega D^{-1} a$$

Iterációs formula:

$$x_n = B_{J(\omega)} x_{n-1} + b_{J(\omega)}$$

Szukcesszív túlrelaxációs módszer

- A Gauss-Seidel-iteráció kiterjesztése.

Tekintsük az

$$R = \frac{1}{\omega} D - L$$

$$S = U + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) D$$

reguláris szétvágást.

Szukcesszív túlrelaxációs módszer

$$B_{S(\omega)} = (D - \omega L)^{-1} (\omega U + (1 - \omega)D)$$

$$b_{S(\omega)} = \omega(D - L\omega)^{-1} a$$

Iterációs formula:

$$x_n = B_{S(\omega)} x_{n-1} + b_{S(\omega)}$$

Elnevezések

- Jacobi-iteráció: **J-módszer**
- Gauss-Seidel-iteráció: **S-módszer**
- Jacobi-féle relaxációs módszer: **JOR-módszer**
- Szukcesszív túlrelaxációs módszer: **SOR-módszer**

Konvergencia-kritériumok

Konvergencia-kritérium

Erősen reguláris együtthatómátrixú $Ax=a$ lineáris egyenletrendszerre a JOR- vagy SOR-módszer akkor és csak akkor konvergens, ha $\rho(B) < 1$. (B az iterációs formulában szereplő mátrix.)

A spektrálsugárra vonatkozó feltétel azzal is helyettesíthető, hogy van olyan mátrixnorma, amelyben a B mátrix értéke 1-nél kisebb.

Relatív konvergencia-kritérium

Tétel. *Legyen*

$$Ax=a$$

egy erősen reguláris együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer. Ha a J-módszer konvergens, akkor tetszőleges

$$0 < \omega < 1$$

relaxációs paraméterre a JOR-módszer is konvergens lesz.

Bizonyítás

Azt fogjuk megmutatni, hogy

$$\rho(B_{J(\omega)}) < 1.$$

Nem nehéz belátni, hogy

$$B_{J(\omega)} = \omega B_J + (1 - \omega)I.$$

Ha B_J sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, akkor viszont $B_{J(\omega)}$ μ_i ($1 \leq i \leq n$) sajátértékei felírhatók

$$\mu_i = \omega \lambda_i + 1 - \omega$$

alakban.

A bizonyítás vége

Így azonban

$$\begin{aligned} |\mu_i| &= |\omega\lambda_i + 1 - \omega| \leq |\omega\lambda_i| + |1 - \omega| \\ &= \omega|\lambda_i| + 1 - \omega < \omega \cdot 1 + 1 - \omega = 1 \end{aligned}$$

vagyis $B_{J(\omega)}$ spektrálsugara 1-nél kisebb,
így a JOR-módszer is konvergens.

A relaxációs paraméter

Tétel. Minden $\omega > 0$ relaxációs paraméter esetén

$$|1 - \omega| \leq \rho(B_{J(\omega)})$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $B_{J(\omega)}$ főátlójában minden elem $1 - \omega$, hiszen

$$B_{J(\omega)} = \omega B_J + (1 - \omega)I$$

$$B_J = D^{-1}(L + U).$$

Bizonyítás

Ekkor viszont, ha $B_{J(\omega)}$ sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ akkor

$$\operatorname{tr}(B_{J(\omega)}) = n(1 - \omega)$$

és ez azt jelenti, hogy

$$n|1 - \omega| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq n\rho(B_{J(\omega)})$$

amiből a bizonyítandó egyenlőtlenség n -nel való leosztással következik.

A relaxációs paraméter

Tétel. Minden $\omega > 0$ relaxációs paraméter esetén

$$|1 - \omega| \leq \rho(B_{S(\omega)})$$

Bizonyítás. Határozzuk meg a $B_{S(\omega)}$ mátrix karakterisztikus polinomjának a 0 helyen felvett értékét.

$$p_{B_{S(\omega)}}(0) = \det(B_{S(\omega)})$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned} p_{B_{S(\omega)}}(0) &= \det(B_{S(\omega)}) = \det(D - \omega L)^{-1} \det(\omega U + (1 - \omega)D) \\ &= \frac{1}{\det D} (1 - \omega)^n \det D = (1 - \omega)^n \end{aligned}$$

Mivel $p_{B_{S(\omega)}}(0)$ egyben a $B_{S(\omega)}$ sajátértékeinek szorzata is, így

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = (1 - \omega)^n.$$

Ebből

$$|1 - \omega|^n = \prod_{i=1}^n |\lambda_i| \leq (\rho(B_{S(\omega)}))^n$$

következik, amiből n -dik gyököt vonva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Egy szükséges feltétel a konvergenciához

Az előbbi tételek folyamánya, hogy a relaxációs módszerek esetén a konvergencia szükséges feltétele, hogy a relaxációs paraméter 2-nél kisebb pozitív szám legyen.

$$|1 - \omega| \leq \rho(B_{J(\omega)}) \quad |1 - \omega| \leq \rho(B_{S(\omega)}) \quad \rho(B) < 1$$

$$|1 - \omega| < 1$$

$$0 < \omega < 2$$

Konvergencia-tételek speciális mátrixokra

Konvergencia-tételek diagonális domináns mátrixok esetén

- Ha az A együtthatómátrix diagonális domináns, akkor mind a J-módszer, mind az S-módszer konvergens.
- Hasonló feltétel mellett a JOR-módszer is minden 1-nél kisebb pozitív relaxációs paraméterre konvergens.

Konvergencia-tételek pozitív definit együtthatómátrix esetén

- Ha az A együtthatómátrix pozitív definit, akkor az S -módszer mindig konvergens.
- Hasonló feltétel mellett a SOR -módszer is mindig konvergens lesz, 2-nél kisebb pozitív relaxációs paraméterrel.

Optimális relaxációs paraméter

Tétel. *Tegyük fel, hogy a B_J mátrix minden sajátértéke valós és $1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.*

Ekkor az

$$\omega^* := \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)}$$

értékre a JOR-módszer konvergens.

Ha $\omega \neq \omega^$, akkor*

$$\rho(B_{J(\omega^*)}) < \rho(B_{J(\omega)}).$$

Megjegyzés

ω^* -ra is teljesül a relaxációs paraméterre vonatkozó azon szükséges feltétel, miszerint az csak 2-nél kisebb pozitív szám lehet. Ehhez elég azt meggondolni, hogy a B_J főátlójában minden elem 0, így a mátrix nyoma, és egyben a sajátértékek összege is 0 kell, hogy legyen. Összevetve ezt a tételnek a sajátértékekre vonatkozó feltételével, következik, hogy

$$\lambda_1 \geq 0 \qquad \lambda_n \leq 0$$

Ekkor viszont áll az is, hogy

$$\lambda_n < 1 - \lambda_1 \qquad \text{vagyis} \qquad \omega^* < 2$$

Bizonyítás

Mivel

$$B_{J(\omega)} = \omega B_J + (1 - \omega)I$$

így a $B_{J(\omega)}$ mátrix

$$\mu_i = \omega \lambda_i + (1 - \omega)$$

sajátértékeire

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$$

is teljesül.

$$\text{Így } \rho(B_{J(\omega)}) = \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$$

Bizonyítás

$$\mu_1^* = \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} \lambda_1 + 1 - \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)}$$

$$\mu_n^* = \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} \lambda_n + 1 - \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} = -\mu_1^*$$

Tehát

$$\rho(B_{J(\mathbb{w}^*)}) = \max(|\mu_1^*|, |\mu_n^*|) = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} = \frac{2\lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_n)}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} < \frac{2 - \lambda_1 - \lambda_n}{2 - \lambda_1 - \lambda_n} = 1$$

vagyis a JOR-módszer konvergens.

Bizonyítás

Definiáljuk az

$$f_i(\omega) = |(\lambda_i - 1)\omega + 1|$$

függvényeket, minden $1 \leq i \leq n$ -re.

Az optimális ω^* értéket, vagyis ahol a $B_{J(\omega)}$ spektrálsugara minimális az

$$\omega^* = \min_{\omega > 0} \max(f_1(\omega), f_n(\omega))$$

képlet határozza meg. Itt a maximum akkor lesz minimális, ha $f_1(\omega) = f_n(\omega)$.

A bizonyítás vége

$$-((\lambda_n - 1)\omega + 1) = (\lambda_1 - 1)\omega + 1$$

$$\omega = \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)}$$

Ha $\omega^* < \omega$, akkor $\rho(B_{J(\omega)}) = f_n(\omega) > f_n(\omega^*) = \rho(B_{J(\omega^*)})$

Ha $\omega < \omega^*$, akkor $\rho(B_{J(\omega)}) = f_1(\omega) > f_1(\omega^*) = \rho(B_{J(\omega^*)})$

Gyakorló feladatok

Gyakorló feladatok

- Vizsgálja meg a négy iterációs módszer konvergenciáját az α valós paraméter különböző értékeire az alábbi együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszerekre.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

Gyakorló feladatok

- Igazoljuk, hogy

$$B_{J(\omega)} = \omega B_J + (1 - \omega)I.$$

Gyakorló feladatok

Igazoljuk, hogy ha B_J sajátértékei

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

akkor $B_{J(\omega)}$ sajátértékei előállnak a következő alakban:

$$\mu_i = \omega \lambda_i + 1 - \omega \quad (1 \leq i \leq n)$$

Irodalomjegyzék

- John H. Mathews, *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992.
- Mihálykó Csaba – Virágh János, *Közelítő és szimbolikus számítások. Feladatgyűjtemény*, Typotex, 2011.
- Virágh János, *Numerikus matematika*, JATEPress, Szeged, 1997.