

Egy eljárás peremérték feladatok megoldására

Kis Istvánné¹, Farkas Levente², Kocsor András², Bálint Imre^{4,3,1}

Számos elméleti és gyakorlati szempontból fontos feladat vezet valamilyen parciális differenciálegyenletre és így a közelítő megoldások hatásos és nagy pontosságú előállítására fontos kérdés. Egy újonnan kifejlesztett módszert mutatunk be, amely egy többváltozós interpolációs függvény alkalmazásával egy homogén célfüggvény minimalizációjára épül. Az interpolációs függvény intervallumonként definiált rácspolinom, amely azonban tetszőleges számú változó esetén is, tetszőleges rendű globális folytonossággal bír. A homogén alakú célfüggvény lehetővé teszi a feladat olyan megfogalmazását, amelyben csak globális minimumhelyek fordulnak elő. Az eljárás nem differenciálegyenletre vezet és így a módszer alkalmazása nagyrészt független a differenciálegyenlet típusától. A tárgyalt példa az eljárás hatékonyságát, pontosságát illusztrálja egy fizikai probléma differenciálegyenletének megoldását approximáló függvény előállításával.

1. AZ SSA-ELJÁRÁS

Az SSA-eljárás ('Shell-Surface Approach' egy nemrég kifejlesztett interpolációs módszer, amely tetszőleges ponthalmazon definiált lokális koordináta rendszerekben értelmezett polinomokra épül. Az elemi felületdarabokat definiáló függvények egy véges tartományon kívül azonosan zérus értékűek, a tartomány határán pedig tetszőleges rendben illeszkednek, így a teljes approximációs tartomány feletti globális folytonosságot szükség szerint állíthatjuk be. Az elemi polinomok paramétereit variációs módszerrel határozzuk meg. Elsőként szabályos rácsot, azután pedig általános szimpliciális komplexeket tekintünk.

¹ MEDFK, Természettudományi Intézet, Dunaújváros.

² JATE, Alkalmazott Informatika Tanszék, Szeged.

³ JATE, Elméleti Fizika Tanszék, Szeged.

⁴ SzOTE, Gyógyszeranalitikai Intézet, Szeged.

A rács minden pontjához egy lokális koordináta rendszert rendelünk $\vec{x}$ helyvektorral és az interpolációs függvényt a következő alakúnak választjuk,

$$(1) \quad \Phi(\vec{x}) = \sum_{v \in V} \eta_v(\vec{x}) S_v(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

ahol v indexeli a rácspontokat, V pedig az indexhalmazt jelöli. A szorzatok S_v komponense egy alkalmasan választott (polinom) bázisfüggvény, amely az aktuális esetben harmadrendű Taylor-polinom,

$$(2) \quad S_v(\vec{x}) = c_0^v + \sum_i v_i^v x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} c_{ij}^v x_i x_j + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} c_{ijk}^v x_i x_j x_k,$$

ahol $c_0^v \cdots c_{ijk}^v$ szabad variációs paraméterek. Az (1)-beli szorzatok másik komponense az η_v súlyfüggvény, amely az aktuális esetben egyváltozós polinomok szorzata

$$(3) \quad \eta_v(\vec{x}) = \prod_{j=1}^n \mu(x_j),$$

ahol n a változók számát jelöli és

$$(4) \quad \mu(x_j) = \begin{cases} \rho(x_j; h_j), & \text{ha } 0 \leq x_j \leq h_j \\ \rho(x_j; h_j), & \text{ha } -h_j \leq x_j < 0 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Itt $\vec{h}$ a cellák oldalhosszúságainak a vektora és a primitív súlyfüggvény a következő,

$$(5) \quad \rho(x_j, h_j) = \frac{\int_{x_j}^{h_j} t^r (h_j - t)^r dt}{\int_0^{h_j} t^r (h_j - t)^r dt},$$

ahol az r paraméter szabadon választható. A (3) súlyfüggvény egy kétváltozós alakját ábrázolja az 1. ábra. A teljes approximációs függvény a rácscellák feletti felületdarabok egyesítésével áll elő. A súlyfüggvény szerepe a felületdarabok összefűzése olyan egységes felületté, amely tetszés szerinti r -ed rendű folytonosságot mutat a teljes approximációs tartományban. Hangsúlyozzuk, hogy az algoritmus szerkezetét a súlyfüggvény alakja és a cellák peremén mutatott tulajdonságai határozzák meg, ezért a Taylor-polinomok is és a súlyfüggvények is más függvényekre cserélhetők a súlyfüggvényeknek a tartomány peremén mutatott tulajdonságai megtartása mellett.

Általános esetben a rácspontok tetszőleges, szabálytalan ponthalmazt alkotnak. A haalmaz triangularizációjával kapott szimpliciális komplexeken azonban az előbbtől alig eltérő algoritmus definiálható, amely megőrzi az eredeti interpolációs függvény r -ed rendű globális folytonosságát. Ez a tulajdonsága egyedülálló az n -változós interpolációs függvények között. A 2. ábrán egy 3-szimplex látható, ahol a rácspontokhoz rögzített lokális, ortogonális koordináta rendszerekben a cellapontokat baricentrikus koordinátákkal $x = x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ definiáljuk. A teljes interpolációs függvény a szimplexek 1-dimenziós élein értelmezett elemi interpolációs függvények súlyozott összege,

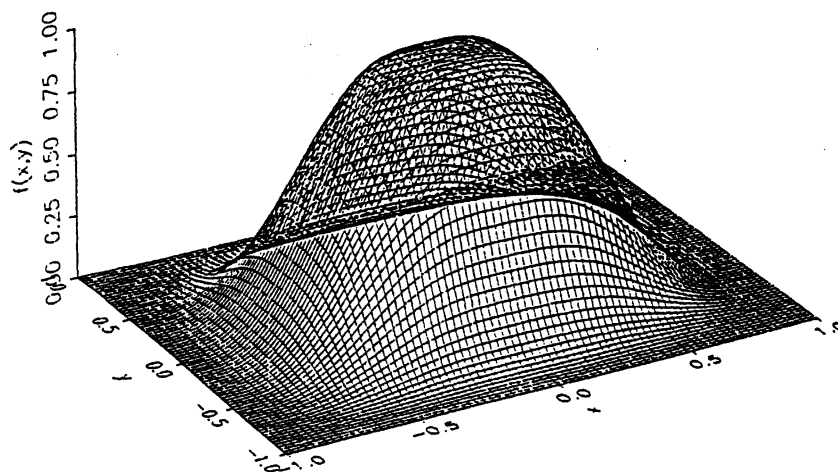


FIGURE 1. Két-változós súlyfüggvény $\eta_0(\vec{x})$

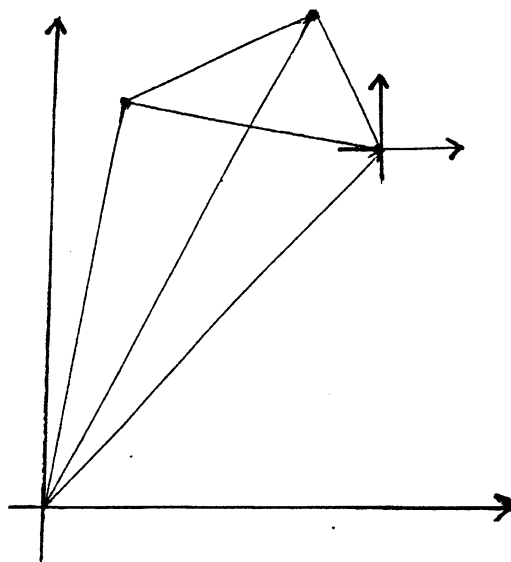


FIGURE 2. 3-szimplex barycentrikus koordinátákkal

azaz a v_i, v_j csúcspontokhoz tartozó elemi súlyfüggvény $M_{i,j}$,

$$(6) \quad M_{i,j} = \nu\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \alpha_j}\right) S_i + \nu\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j}\right) S_j$$

és

$$(7) \quad \Phi(\vec{x}) = \sum_{cell_k} 1/n_f \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j>i}^{n_f+1} (\alpha_i + \alpha_j) M_{i,j} = \sum_{cell_k} \sum_{i=1}^{n_f+1} \xi_i S_i,$$

ahol n_f a szimplex dimenziója és $cell_k$ a cellákat indexeli. A ν, ω súlyfüggvények könnyen felismerhető hasonlóságot mutatnak (4) és (5)-el,

$$(8) \quad \nu(s) = \begin{cases} \omega(s), & \text{ha } 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

$$(9) \quad \omega(s) = \frac{\int_s^1 t^r (h_j - t)^r dt}{\int_0^1 t^r (h_j - t)^r dt}.$$

A ξ_i súlyfüggvény

$$(10) \quad \xi_i = \frac{1}{2n_f} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_f+1} (\alpha_i + \alpha_j) \nu\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \alpha_j}\right),$$

ugyan különbözik (3)-tól, de ugyanazokat a tulajdonságokat mutatja a cella peremén.

Az algoritmus ezen rövid leírása után nem foglalkozunk részletesen az approximációs függvény analitikus tulajdonságaival. Összefoglalva megállapítjuk, hogy intervallumonként definiált k -adfokú polinom, amely az egész approximációs tartomány felett r -ed fokú ($r < k$) globális folytonosságot mutat. Még nem határoztuk meg a bázisfüggvény (Taylor-) polinomok koefficienseit, amelyek az approximációs függvény alakját határozzák meg. Ezeket a szabad paramétereket egy variációs feladatból fogjuk meghatározni.

PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSA

Tekintsük egy parciális differenciálegyenlet következő szimbolikus alakját,

$$(11) \quad \Delta \Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in D$$

ahol Δ tetszőleges differenciáloperátorok és analitikus függvények valamilyen kifejezése, D a meghatározandó Φ függvény tartója, f ismert függvény és adottak még különféle peremfeltételek,

$$(12) \quad \Delta_i \Phi(\vec{x}) = g_i(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in D_i, \quad (i = 1, \dots, k)$$

alakban, ahol $D_i \subseteq D$ és Δ_i valamilyen (differenciál-) operátort jelöl.

(A függvény interpoláció egy speciális differenciálegyenletként értelmezhető

$$(13) \quad \Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in D$$

ahol $\Delta = 1$ és D az approximációs tartomány.)

Az általános esetben a fenti típusú problémáknak csak közelítő megoldását tudjuk előállítani. A Φ függvényt az előbbiekben tárgyalt szabályos vagy szabálytalan pontthalmazon értelmezett SSA-típusú ráccspolinomok osztályában keressük. Úgy határozzuk meg a szabad koefficienseket, hogy Φ a differenciálegyenletet kielégítse a megadott peremfeltételekkel együtt. A feladat így egy mellékfeltételes optimalizációs probléma, amelyet egy alkalmasan definiált funkcionál minimalizálásával oldunk meg,

$$(14) \quad \min_{\Phi} \Psi(\Phi) = \sum_i \int_{D_i} (\Delta_i \Phi(\vec{x}) - g_i(\vec{x}))^2 d\vec{x}$$

ahol i a feltételeket indexeli, $\Delta_0 \equiv \Delta$ és $g_0 \equiv f$. A Ψ funkcionál értéke Φ megválasztásától függ, azonban a Φ SSA-függvényt meghatározzák a $\vec{c}$ koefficiensek. Ezért a $\vec{c}$ koefficiensek által kifeszített $\mathbb{R}^m$ paraméterterben, $\Psi(\vec{c})$ a koefficiensek kvadratikus függvénye,

$$(15) \quad \min_{\vec{c}} \Psi(\vec{c}) = \sum_i \int_{D_i} (\Delta_i \Phi(\vec{x}; \vec{c}) - g_i(\vec{x}))^2 d\vec{x}.$$

Gyakorlati okokból sokszor a funkcionál diszkrétizált alakját használjuk,

$$(16) \quad \min_{\vec{c}} \Psi(\vec{c}) = \sum_i \sum_{\vec{p}_k \in P_i} (\Delta_i \Phi(\vec{p}_k; \vec{c}) - g_i(\vec{p}_k))^2,$$

ahol $P_i \subset D_i$. A parciális differenciálegyenlettel együttjáró mellékfeltételek jelenléte azonban funkcionálok összegének a minimalizálását teszi szükségessé, amelynek több lokális minimumhelye lehetséges. A több lokális minimumhely közül az alapfeladat szempontjai szerint azonban csak egy/(vagy néhány) elfogadható számunkra. Mivel a $\Psi(\vec{c})$ nem-negatív függvénye a koefficienseknek és a parciális differenciálegyenlet megoldása szempontjából a $\Psi(\vec{c}) = 0$ az elfogadható, célszerű olyan funkcionált definiálni, amelynek nincsenek lokális minimumhelyei, amelyeket egy gradiens-vezérelt optimalizációs eljárás (kvázi-Newton módszer) megtalálhat, meggyújtva ezzel a globális minimumhely megtalálását. A sok-dimenziós paraméterterben nem alkalmazható globális optimalizáló eljárások helyett a minimálandó célfüggvényt ezért homogén alakban vesszük föl. Egy r -ed rendű, f homogén függvény teljesíti az

$$(17) \quad f(k\vec{x}) = k^r f(\vec{x})$$

feltételt. Számos 'jó' tulajdonságuk van, amelyek közül számunkra most a legfontosabb az

$$(18) \quad \vec{x}^T \nabla f(\vec{x}) = r f(\vec{x})$$

összefüggés. Ez biztosítja, hogy $r \neq 0$ esetén

$$(19) \quad \nabla f = \vec{0} \implies f = 0,$$

azaz ha a gradiens zérusvektor, akkor a függvényérték is szükségszerűen zérus, tehát nincs a függvénynek lokális minimumhelye. (Belátható, hogy az összefüggés $r = 0$ -ra

is teljesül.) Egy alkalmas funkcionál konstruálható a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij tétel alapján, a következő formában,

$$(20) \quad \min_{\vec{c}} \Psi(\vec{c}) = \sum_i \int_{D_i} (\Delta_i \Phi(\vec{x}; \vec{c}))^2 d\vec{x} \int_{D_i} (g_i(\vec{x}))^2 d\vec{x} - \left(\int_{D_i} \Delta_i \Phi(\vec{x}; \vec{c}) g_i(\vec{x}) d\vec{x} \right)^2$$

vagy a hasonló

$$(21) \quad \min_{\vec{c}} \Psi(\vec{c}) = \sum_i \sqrt{\int_{D_i} (\Delta_i \Phi(\vec{x}; \vec{c}))^2 d\vec{x}} \sqrt{\int_{D_i} (g_i(\vec{x}))^2 d\vec{x}} - \int_{D_i} \Delta_i \Phi(\vec{x}; \vec{c}) g_i(\vec{x}) d\vec{x}$$

alakban. A (20) és (21) függvények általában homogének és ezért annak elkerülésére, hogy az optimalizációs eljárás a zérusvektorhoz konvergáljon, a következő normalizált zérusrendű homogén függvényt választjuk,

$$(22) \quad \begin{aligned} \min_{\vec{c}} \Psi(\vec{c}) &= \\ &= \sum_i \frac{\sqrt{\int_{D_i} (\Delta_i \Phi(\vec{x}; \vec{c}))^2 d\vec{x}} \sqrt{\int_{D_i} (g_i(\vec{x}))^2 d\vec{x}} - \int_{D_i} \Delta_i \Phi(\vec{x}; \vec{c}) g_i(\vec{x}) d\vec{x}}{\sqrt{\int_{D_i} (\Delta_i \Phi(\vec{x}; \vec{c}))^2 d\vec{x}} \sqrt{\int_{D_i} (g_i(\vec{x}))^2 d\vec{x}}} \\ &= \sum_i 1 - \frac{\int_{D_i} \Delta_i \Phi(\vec{x}; \vec{c}) g_i(\vec{x}) d\vec{x}}{\sqrt{\int_{D_i} (\Delta_i \Phi(\vec{x}; \vec{c}))^2 d\vec{x}} \sqrt{\int_{D_i} (g_i(\vec{x}))^2 d\vec{x}}}. \end{aligned}$$

A függvény változási intervalluma $[0, 2]$. Amennyiben a parciális differenciálegyenletet kielégítő Φ függvény teljesíti a $\Delta \Phi = s f$ összefüggést (valamilyen s konstansra), azaz a két oldal lineáris függésben van, akkor $\Psi(\vec{c}) = 0$.

2. AZ ELEKTROMOS IMPEDANCIA TOMOGRÁFIA

A továbbiakban a fenti eljárás egy alkalmazását mutatjuk be röviden. Az elektromos vezetőképesség függvény fontos anyagi paraméter, amelynek a meghatározása jelentős információt szolgáltat a geofizikában, az orvoslásban és számos műszaki alkalmazása is lehet. A különböző területek sajátosságai különböző közelítéseket engednek meg, ill. tesznek lehetővé. Mi most egy egyszerű tárgya-lásmódot választunk illusztrációul. A Maxwell-egyenletekből a következő összefüggés adódik a Φ elektromos potenciál és a σ vezetőképesség kapcsolatára (egyenáram esetén),

$$(23) \quad \nabla(\sigma(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x})) = 0, \quad \vec{x} \in D$$

ahol D a vizsgált tartomány. Ha $\sigma(\vec{x}) \geq d > 0$, $\forall \vec{x} \in D$, akkor egy homogén elliptikus parciális differenciálegyenletről van szó. Amennyiben σ ismert, a Φ potenciált megkapjuk a Dirichlet- vagy Neumann-feladatok megoldásával aszerint, hogy a D tartomány ∂D peremén a Φ függvényértékét ismerjük, $\Phi(\vec{x}) = f(\vec{x})$; $\forall \vec{x} \in \partial D$, vagy a gradiense normális komponensét ismerjük, $\sigma(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x}) \circ \vec{n}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \circ \vec{n}(\vec{x})$; $\forall \vec{x} \in \partial D$, ($\vec{j}$ az áramsűrűség-, $\vec{n}$ a normál-vektor). Ez az ún. 'forward' probléma és a megoldása nem jelent elvi nehézséget. Az elektromos impedancia tomográfia (EIT) azonban az ismeretlen vezetőképesség függvény meghatározását tűzi célul. A mérési lehetőségek

a peremen elhelyezett elektródák mérhető potenciál és az elektródapárok között folyó áram mérését teszik lehetővé. A peremen mérhető információ tehát

$$(24) \quad \Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}); \quad \sigma(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x}) \circ \vec{n}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \circ \vec{n}(\vec{x}); \quad \forall \vec{x} \in \partial D,$$

ahol σ és Φ ismeretlen függvények a tartomány belsejében. Ez az ún. 'inverz' probléma és a megoldása számottevő matematikai nehézséget jelent.

A fenti feladatot az SSA-eljárással oldottuk meg, az ismeretlen σ és Φ függvényeket SSA-függvényekkel közelítve. Az alapösszefüggésünket kifejtve és jelezve a $\vec{c}$ -től való függést,

$$(25) \quad \nabla \sigma(\vec{x}; \vec{c}) \nabla \Phi(\vec{x}; \vec{c}) + \sigma(\vec{x}; \vec{c}) \nabla \nabla \Phi(\vec{x}; \vec{c}) = 0$$

adódik. Bevezetve a $\Gamma(\vec{c})$ függvényt,

$$(26) \quad \Gamma(\vec{c}) = \int_D (\nabla \sigma(\vec{x}; \vec{c}) \nabla \Phi(\vec{x}; \vec{c}) + \sigma(\vec{x}; \vec{c}) \nabla \nabla \Phi(\vec{x}; \vec{c}))^2 d\vec{x}$$

az optimális $\vec{c}$ mellett $\Gamma = 0$, ami ebben a függvényosztályban akkor teljesül, ha az integrandus azonosan zérus. Az aktuális feladatra a következő zérusrendű homogén függvényt konstruáljuk,

$$(27) \quad \begin{aligned} \min_{\vec{c}} \Psi(\vec{c}) &= \\ &= \frac{\int_{D_0} (\Delta_0 \tilde{\Phi}(\vec{x}; \vec{c}))^2 d\vec{x}}{\sqrt{\int_{D_0} (\Delta_{01} \tilde{\Phi}(\vec{x}; \vec{c}))^2 d\vec{x}} \sqrt{\int_{D_0} (\Delta_{02} \tilde{\Phi}(\vec{x}; \vec{c}))^2 d\vec{x}}} + \\ &+ \sum_{i \geq 1} 1 - \frac{\int_{D_i} \Delta_i \tilde{\Phi}(\vec{x}; \vec{c}) g_i(\vec{x}) d\vec{x}}{\sqrt{\int_{D_i} (\Delta_i \tilde{\Phi}(\vec{x}; \vec{c}))^2 d\vec{x}} \sqrt{\int_{D_i} (g_i(\vec{x}))^2 d\vec{x}}}, \end{aligned}$$

ahol $\tilde{\Phi}$, a σ és Φ függvények $\vec{c}$ koefficiens vektorainak a konkatenációjához tartozó függvényt jelöli, a különböző Δ_i operátorok a differenciálegyenlet és a mellékfeltételek operátorai, a g_i függvények pedig a mellékfeltételeket tartalmazzák. A (27)-ben szereplő különböző operátorokat a következőképp értelmezzük;

$$(28) \quad \begin{aligned} \Delta_0 \tilde{\Phi}(\vec{x}; \vec{c}) &= \nabla \sigma(\vec{x}; \vec{c}) \nabla \Phi(\vec{x}; \vec{c}) + \sigma(\vec{x}; \vec{c}) \nabla \nabla \Phi(\vec{x}; \vec{c}), \quad \forall \vec{x} \in \text{Int } D; \\ \Delta_{01} \tilde{\Phi}(\vec{x}; \vec{c}) &= \nabla \sigma(\vec{x}; \vec{c}) \nabla \Phi(\vec{x}; \vec{c}), \quad \forall \vec{x} \in \text{Int } D; \\ \Delta_{02} \tilde{\Phi}(\vec{x}; \vec{c}) &= \sigma(\vec{x}; \vec{c}) \nabla \nabla \Phi(\vec{x}; \vec{c}), \quad \forall \vec{x} \in \text{Int } D; \\ \Delta_1 \tilde{\Phi}(\vec{x}; \vec{c}) &= \Phi(\vec{x}; \vec{c}), \quad \forall \vec{x} \in \partial D; \\ \Delta_2 \tilde{\Phi}(\vec{x}; \vec{c}) &= \sigma(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x}) \circ \vec{n}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \partial D; \end{aligned}$$

A (27)-es célfüggvény optimalizációja olyan σ és Φ függvényeket eredményez, amelyek kielégítik a parciális differenciálegyenletet a tartomány minden belső $\vec{x} \in \text{Int } D$ pontjában és kielégítik a peremfeltételeket is abban az értelemben, hogy fennáll az

$$(29) \quad \Phi(\vec{x}; \vec{c}) = s_1 f(\vec{x}); \quad \sigma(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x}) \circ \vec{n}(\vec{x}) = s_2 \vec{j}(\vec{x}) \circ \vec{n}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \partial D$$

összefüggés, azaz mindkét függvény a peremen előírt függvényekkel lineáris függésben van. Mivel a Ψ első tagja is homogén függvény, $\Gamma = 0$ fennáll akkor is, ha alkalmas konstansokkal megszorozzuk a σ és Φ függvényeket. Ezért $\frac{\Phi}{s_1}$ és $\frac{s_1 \sigma}{s_2}$ ugyanúgy kielégítik a parciális differenciálegyenletet mint σ és Φ , de kielégítik egyidejűleg a peremfeltételeket is. Gyakran célszerű a (27)-es függvény diszkrétizált alakját használni, amelyben az integrálokat a D tartomány alkalmasan választott diszkrét $\vec{p}_j \in D$ pontjain végzett összegezés helyettesíti,

$$\begin{aligned}
 \min_{\vec{c}} \Psi(\vec{c}) &= \\
 (30) \quad &= \frac{\sum_{\vec{p} \in D_0} \left(\Delta_0 \tilde{\Phi}(\vec{p}; \vec{c}) \right)^2}{\sqrt{\sum_{\vec{p} \in D_{01}} \left(\Delta_{01} \tilde{\Phi}(\vec{p}; \vec{c}) \right)^2} \sqrt{\sum_{\vec{p} \in D_{02}} \left(\tilde{\Phi}(\vec{p}; \vec{c}) \right)^2}} + \\
 &+ \sum_{i \geq 1} 1 - \frac{\sum_{\vec{p} \in D_i} \Delta_i \tilde{\Phi}(\vec{p}; \vec{c}) g_i(\vec{x})}{\sqrt{\sum_{\vec{p} \in D_i} \left(\Delta_i \tilde{\Phi}(\vec{p}; \vec{c}) \right)^2} \sqrt{\sum_{\vec{p} \in D_i} (g_i(\vec{x}))^2}}.
 \end{aligned}$$

A fenti eljárással készült függvény rekonstrukció látható a 3. és 4.-es ábrán. A modell számításban ismertnek tételeztük föl a σ függvényt, megoldottuk a *forward*-problémát és ezzel kiszámítottuk a peremen mérhető adatokat. Ezután a fenti eljárással rekonstruáltuk a σ függvényt, a peremen mérhető adatok ismeretében. A 3. ábra az exakt függvényt, a 4. ábra a rekonstruált függvényt ábrázolja. A rekonstrukció nagypontosságú, a két függvény különbsége alig felismerhető. A pontosságot a rács sűrűsége és a polinom fokszáma határozza meg. Az ismertetett eljárás széleskörűen alkalmazható parciális differenciálegyenletek közelítő megoldásainak nagypontosságú előállítására, s mivel nem egy differencia sémáról van szó a módszer alkalmazhatósága nagymértékben független a differenciálegyenlet típusától is.

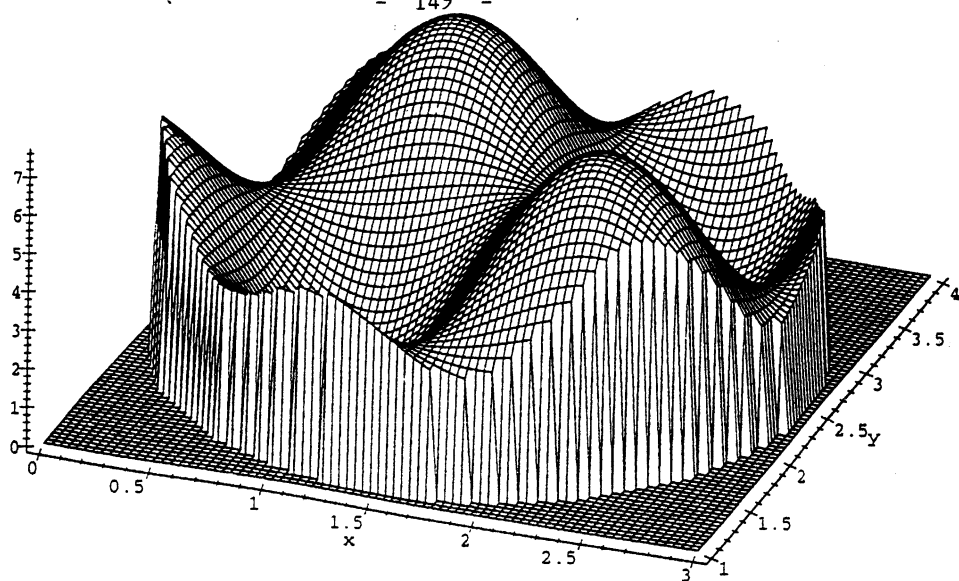


FIGURE 3. Az exakt σ függvény

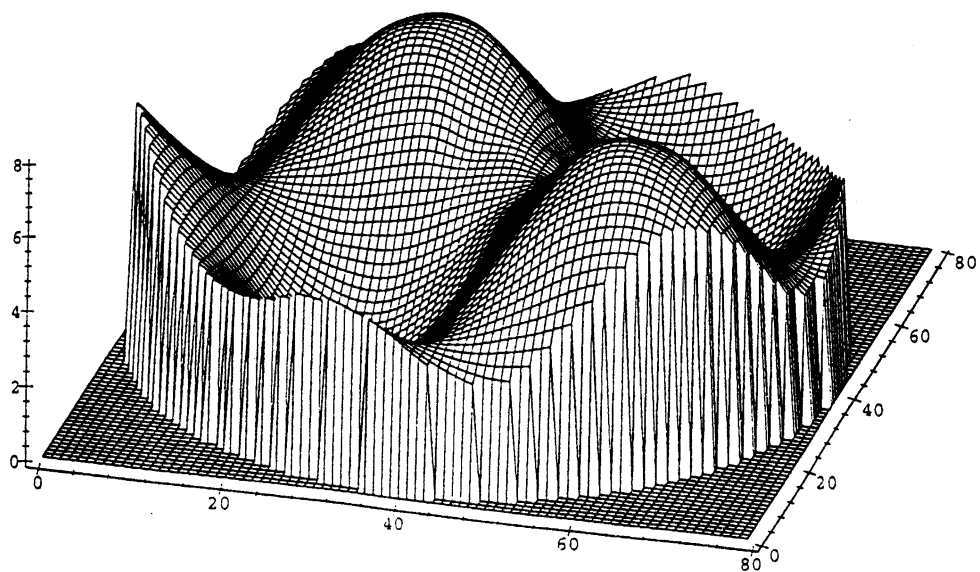


FIGURE 4. A rekonstruált σ függvény