Csempe átíró nyelvtanok

Tile rewriting grammars

Németh L. Zoltán

Számítástudomány Alapjai Tanszék
SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2. előadás - 2006. április 24.

Tartalom

Néhány alapvető eredmény csempeátíró nyelvtanokra

1. tétel.

$$\mathrm{TS} \subsetneq \mathrm{TRG}$$

2. tétel.

$$\mathrm{TS} = \mathrm{nrTRG}$$

3. tétel.

$$\mathrm{CFPG} \subsetneq \mathrm{TRG}$$

Képek (pictures) I.

Alapdefiníciók

- **ábécé**: Σ: nemüres, véges halmaz
- **kép**: p: egy mátrix melynek elemei Σ-beliek
- **méret**: $|p| = (|p|_{row}, |p|_{col})$
- **pixel**: $p(i,j)$: az i. sor, j. eleme p mátrixában
  $1 \leq i \leq |p|_{row}, 1 \leq j \leq |p|_{col}$
- **üres kép**: λ
- **nemüres képek halmaza**: $\Sigma^{+,+}$
- **képek halmaza**: $\Sigma^{*,*} = \Sigma^{+,+} \cup \{\lambda\}$
- **képnyelv** (picture language): $L \subseteq \Sigma^{*,*}$

Műveletek képeken és képnyelveken

Műveletek

- **vízszintes konkatenáció**: $p \varobar q$ csak, ha $|p|_{row} = |q|_{row}$
- **függőleges konkatenáció**: $p \ominus q$ csak, ha $|p|_{col} = |q|_{col}$
- $\varobar$ és $\ominus$ kiterjeszthető képnyelvekre.
- $\varobar$ és $\ominus$ **lezárási operátor**ai:

$$L^{*\varobar} := \bigcup_{i \geq 0} L^{i\varobar}, \text{ ahol}$$

$$L^{0\varobar} := \{\lambda\}, \quad L^{i\varobar} = L \varobar L^{(i-1)\varobar}, \quad i > 0$$

- $L^{*\ominus}$ hasonlóan definiálható
- $L^{*,*}$ **Simplot-operátor:**
  $p \in L^{*,*} \Leftrightarrow p = \lambda$ vagy p L -beli részképekre partícionálható.
- Egyéb műveletek: projekció, elforgatás, tükrözés

Képek szélének megjelölése # szimbólumokkal

Bekeretezett képek

- Legyen $\# \notin \Sigma$ egy ún. **keret szimbólum.**
- $p \in \Sigma^{+,+}$ **bekeretezett változata**: $\bar{p}$ legyen az a kép, amelyet úgy kapunk, hogy p-t mindenütt egy-egy $\#$ szimbólummal vesszük körbe:

$$\bar{p} = \begin{array}{ccccc} \# & \# & \cdots & \# & \# \\ \# & p(1,1) & \cdots & p(1,|p|_{col}) & \# \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \# & p(|p|_{row},1) & \cdots & p(|p|_{row},|p|_{col}) & \# \\ \# & \# & \cdots & \# & \# \end{array}$$

Csempék és lokális nyelv definíciója

Lokális nyelvek

- A Σ feletti (h,k) méretű képek halamazát jelölje $\Sigma^{h,k}$.
- Egy $p \in \Sigma^{+,+}$ kép (h,k) méretű részképeinek a halmaza:

$$B_{h,k}(p) := \{q \in \Sigma^{h,k} : q \trianglelefteq p\}.$$

- Kiterjesztése nyelvekre: $B_{h,k}(L) := \{B_{h,k}(p) \mid p \in L\}$
- Ha $\theta \subseteq (\Sigma \cup \{\#\})^{(2,2)}$, akkor θ elemeit **csempék**nek (tiles) is hívjuk.
- $\mathrm{LOC}(\theta) := \{\, p \in \Sigma^{+,+} \mid B_{2,2}(\bar{p}) \subseteq \theta \,\}$
- Az $L \subseteq \Sigma^{+,+}$ nyelv **lokális**, ha $L = LOC(\theta)$ valamely $\theta \subseteq (\Sigma \cup \{\#\})^{2,2}$ csempe halmazra.

Csempéző rendszerek

Csempéző rendszerek (Tiling Systems)

Egy **csempéző rendszer** (Tiling System, TS) a következő komponensekből áll $T = (\Sigma, \Gamma, \theta, \pi)$, ahol

- Σ és Γ két ábécé,
- $\pi : \Gamma \to \Sigma$ egy leképezés (projekció),
- θ 2×2-es csempék halmaza $\Gamma \cup \{\#\}$ felett (nyilván véges).

A T által felismert v. definiált nyelv

$$L(T) := \pi(LOC(\theta)).$$

TS nyelvek (TS)

A csempéző rendszer által felismerhető nyelveket, TS**-felismerhető**, vagy röviden TS**-nyelv**eknek hívjuk.

TS zártsági tulakdonságai

1. állítás.
A csempéző rendszerrel felimerhető képnyelvek osztálya zárt az alábbi műveletekre nézve:

- unió, metszet
- konkatenációk: $\varobar, \ominus$
- lezárási operátorok: $*\varobar, *\ominus$
- projekció, Descartes-szorzás: $\otimes$
- elforgatás, tükrözés (Az eddigiek bizonyítását ld. [3]-ban.)
- Simplot-operátor (Ld. [7].)
- TS-blokkhelyettesítés (Ld. [1].)

Megjegyzés.
TS nem zárt a komplementer képzésre nézve.

A blokkhelyettesítésre való zártság

Bizonyítás vázlat.

Legyen $\sigma : \Delta \to 2^{\Sigma^{+,+}}$ TS helyettesítés, $L \subseteq (\Delta \times \mathcal{M})^{+,+}$ TS blokknyelv. Ekkor

$$\sigma_B(L) = |_\Sigma\left((L \otimes \Sigma^{+,+}) \cap \left(\bigcup_{d\in\Delta} \rho_d(\sigma(d))\right)^{+,+}\right)$$

ahol

$$\begin{array}{rcl} \rho_d(q) & = & \square(d^{|q|}) \otimes q \qquad d \in \Delta, q \in \Sigma^{+,+} \\ \rho_d(L') & = & \{\, \rho_d(p) \mid p \in L' \,\}, \\ |_\Sigma & : & \Delta \times \mathcal{M} \times \Sigma \to \Sigma \text{ a természetes projekció.} \end{array}$$

Így TS zártsági tulajdonságai miatt $\sigma_B(L) \in \mathrm{TS}$.

Lokalitás

tartalmazással (hagyományos fogalom) és egyenlőségekkel (általánosítása)

Lokális és lokálisan tesztelhető nyelvek

Legyenek θ, θ_1, θ_2,..., $\theta_n \subseteq (\Sigma \cup \{\#\})^{2,2}$ csempehalmazok.

- $\mathrm{LOC}(\theta) = \{p \in \Sigma^{*,*} \mid B_{2,2}(\bar{p}) \subseteq \theta\}$
- $\mathrm{LOC_{eq}}(\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}) = \{p \in \Sigma^{*,*} \mid \exists k : B_{2,2}(\bar{p}) = \theta_k\}$

Általuk meghatározott képnyelv osztályok

Jelölje LOC, illetve $\mathrm{LOC_{eq}}$ az így megadható nyelvek osztályát. TS és $\mathrm{TS_{eq}}$ pedig ezen osztályok lezártját a projekciókra nézve.

TS és $\mathrm{TS}_{\mathrm{eq}}$ egyenlősége I.

1. lemma.

$$LOC \subseteq LOC_{eq}$$

Bizonyítás.

$$L = \mathrm{LOC}(\theta) \;\Rightarrow\; L = \mathrm{LOC}_{\mathrm{eq}}(2^{\theta})$$

Megjegyzés.

$$LOC \subsetneq LOC_{eq}$$

Már egy dimenzióban is $\{abc, dbe\} \in \mathrm{LOC}_{\mathrm{eq}} \setminus \mathrm{LOC}$.

TS és $\mathrm{TS}_{\mathrm{eq}}$ egyenlősége II.

2. lemma.

$$\mathrm{LOC}_{\mathrm{eq}} \subseteq \mathrm{TS}$$

Bizonyítás vázlat.

$$\begin{aligned}
\mathrm{LOC}_{\mathrm{eq}}(\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}) &= \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{LOC}_{\mathrm{eq}}(\{\theta_i\}) \\
\mathrm{LOC}_{\mathrm{eq}}(\theta_i) &= \pi(\mathrm{LOC}(\widehat{\theta}_i)),
\end{aligned}$$

Azaz alkalmas $\widehat{\theta}_i$ csempékkel „lokálisan továbbítható” a balalsó sarokból a jobbfelső sarokba az az információ, hogy θ_i csempéi közül eddig melyek fordultak elő a csempézésben.
A pontos bizonyítást megtalálható [2]-ben.

TS és $\mathrm{TS}_{\mathrm{eq}}$ egyenlősége III.

Megjegyzés.

$$\mathrm{LOC}_{\mathrm{eq}} \subsetneq \mathrm{TS}$$

Hiszen a négyzetekből álló képnyelvre:

$$L_{\text{négyzetek}} = \{\, p \in a^{+,+} \mid \exists n \geq 1 : |p| = (n, n) \,\} \in \mathrm{TS} \setminus \mathrm{LOC}_{\mathrm{eq}}$$

2. állítás.

$$\mathrm{TS}_{\mathrm{eq}} = \mathrm{TS}$$

Bizonyítás.

1. lemma: $\mathrm{LOC} \subseteq \mathrm{LOC}_{\mathrm{eq}} \Rightarrow \mathrm{TS} \subseteq \mathrm{TS}_{\mathrm{eq}}$
2. lemma: $\mathrm{LOC}_{\mathrm{eq}} \subseteq \mathrm{TS} \quad \Rightarrow \mathrm{TS}_{\mathrm{eq}} \subseteq \mathrm{TS}$

A keretszimbólumok elhagyása

Megállapodás.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden kép legalább 2×2-es méretű. Az $1 \times n$-es és $m \times 1$-es képek 1×2-es, illetve 2×1-es csempék segítségével hasonlóan kezelhetők, az üres képtől pedig eltekintünk.

Lokális nyelvek keret használata nélkül

Legyenek $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \subseteq \Sigma^{2,2}$ csempehalmazok.

- $\mathrm{LOC_u}(\omega) := \{\, p \in \Sigma^{+,+} \mid B_{2,2}(p) \subseteq \omega \,\}$
- $\mathrm{LOC_{u,eq}}(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}) := \{\, p \in \Sigma^{+,+} \mid \exists k : B_{2,2}(p) = \omega_k \,\}$

Általuk meghatározott képnyelv osztályok

Jelölje $\mathrm{LOC_u}$, illetve $\mathrm{LOC_{u,eq}}$ a megfelelő nyelvekosztályokat. $\mathrm{TS_u}$ és $\mathrm{TS_{u,eq}}$ pedig az osztályok lezártját a projekciókra nézve.

A keret nélküli csempézés szimulálása keretes csempékkel

3. lemma.

$$\mathrm{TS}_{\mathrm{u,eq}} \subseteq \mathrm{TS}_{\mathrm{eq}}$$

Bizonyítás. „Minden csempe a kép szélére is kerülhet.”
Ha $T = (\Sigma, \Gamma, \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}, \pi)$ egy $\mathrm{TS}_{\mathrm{u,eq}}$, akkor vele ekvivalens $\mathrm{TS}_{\mathrm{eq}}$ lesz $T' = (\Sigma, \Gamma, \Theta, \pi)$. Minden $\boxed{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}} \in \omega_k$-ra vegyük fel a δ_k halmazba a következő csempéket:

$$\left\{ \boxed{\begin{matrix} \# & \# \\ \# & a \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} \# & \# \\ a & b \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} \# & \# \\ b & \# \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} \# & a \\ \# & c \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} b & \# \\ d & \# \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} \# & c \\ \# & \# \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} c & d \\ \# & \# \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} d & \# \\ \# & \# \end{matrix}} \right\}$$

Végül álljon Θ a következő halmazokból:

$$\{\, \omega_k \cup \omega \mid \omega \subseteq \delta_k, \,\} \qquad 1 \leq k \leq n.$$

A keretes csempézés szimulálása keret nélküli csempékkel.

4. lemma.

$$\mathrm{TS}_{\mathrm{eq}} \subseteq \mathrm{TS}_{\mathrm{u,eq}}$$

Bizonyítás vázlat [6]-ból.
1. lépés: a csempék ábécéjének megduplázása

Ha

$$T = (\Sigma, \Gamma, \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}, \pi)$$

egy $\mathrm{TS}_{\mathrm{eq}}$, akkor vele ekvivalens $\mathrm{TS}_{\mathrm{u,eq}}$ lesz

$$\begin{array}{lcl} T' & = & (\Sigma, \Gamma \cup \Gamma', \Omega, \tilde{\pi}), \text{ ahol} \\ \Gamma' & = & \{\, \sigma' \mid \sigma \in \Gamma \,\} \quad \Gamma \text{ „másolata”, és} \\ \tilde{\pi} & : & \pi \text{ kiterjesztése } \Gamma \cup \Gamma'\text{-re: } \tilde{\pi}(\sigma') = \pi(\sigma). \end{array}$$

Ω-t később adjuk meg.

A bizonyítás folytatása

2. lépés: a külső és belső csempék szétválasztása

Minden θ_i halmazra legyen

$\theta_i^{\text{külső}}$: azok a csempék θ_i-ből, melyekben $\#$ szerepel

$\theta_i^{\text{belső}}$: $\theta_i \setminus \theta_i^{\text{külső}}$

A bizonyítás folytatása

3. lépés: a kép szélének megjelölése a csempékben

Egy $t \in \theta_i^{\text{belső}}$ csempe **a keret mellé tehető**, ha van olyan $t' \in \theta_i^{\text{külső}}$ csempe, mely „átfedi” t keret mellé kerülő pozícióit (éleknél 2, sarkoknál 1 betűt). Gyűjtsük a δ_i halmazba azokat a csempéket, melyeket úgy kapunk, hogy minden $\theta_i^{\text{belső}}$-beli, keret mellé tehető csempében a keret mellé kerülő betűket a vesszős párjukra cseréljük. Pl.

$$\boxed{\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}} \in \theta_i^{\text{belső}}, \qquad \boxed{\begin{array}{cc} \# & \# \\ a & b \end{array}}, \boxed{\begin{array}{cc} d & \# \\ \# & \# \end{array}} \in \theta_i^{\text{külső}} \text{ esetén}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} a' & b' \\ c & d \end{array}} \text{ és } \boxed{\begin{array}{cc} a & b' \\ c' & d' \end{array}} \in \delta_i.$$

A bizonyítás befejezése

4. lépés: Ω megadása

Legyen $\tau : \Gamma \cup \Gamma' \to \Gamma$

$$\tau(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \in \Gamma \\ \sigma & \text{ha } x = \sigma' \in \Gamma'. \end{cases}$$

τ természetes módon kiterjeszthető csempékre.

Ω álljon a következő csempe halmazokból:

$$\{\, \omega \mid \omega \subseteq (\theta_i^{\text{belső}} \cup \delta_i), \quad \tau(\omega) = \theta_i^{\text{belső}}, \quad \omega \cap \delta_i \neq \emptyset \,\}$$

Belátható (?), hogy $L(T) = L(T')$.

A különböző TS-ek ekvivalenciája

3. állítás.

$$\mathrm{TS}_{\mathrm{u,eq}} = \mathrm{TS}_{\mathrm{eq}} = \mathrm{TS}$$

Bizonyítás.

A 3. és 4. lemma, valamint a 2. állítás következménye.

Csempe átíró nyelvtanoknál korlátozott lokalitást van

Korlátozott lokális nyelv

Egy $L \subseteq \Sigma^{+,+}$ **korlátozott lokális nyelv** (restricted local language), ha létezik olyan Γ (# nélkül!) feletti ω csempe halmaz, melyre $p \in L \Leftrightarrow$ ha a következők teljesülnek:

1. ha $|p|_{row} \geq 2, |p|_{col} \geq 2$, akkor $B_{2,2}(p) = \omega$
2. ha $|p|_{row} = 1, |p|_{col} \geq 2$, akkor $B_{1,2}(p) = \omega$
3. ha $|p|_{row} \geq 2, |p|_{col} = 1$, akkor $B_{2,1}(p) = \omega$

Megjegyzés.

Azaz L korlátozott lokális nyelv, ha $L = \mathrm{LOC}_{\mathrm{u,eq}}(\{\omega\})$ alakú. A korlátozott lokális nyelvek a lokális nyelvek valódi részosztályát alkotják. De a TS nyelveket ekvivalens módon lehet korlátozott lokális nyelvek véges uniójának projekcióiként definiálni, hiszen

$$\mathrm{LOC}_{\mathrm{u,eq}}(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{LOC}_{\mathrm{u,eq}}(\{\omega_i\})$$

Csempe átíró nyelvtanok

Véges nyelv

Jelölje $FIN(\Sigma)$ a Σ feletti véges nyelvek halmazát.

Konvex & korlátozott lokális

$LCVX_{\Delta'}(\Delta)$, pedig a Δ' konvex, korlátozott lokális nyelvek halmazát Δ felett, $\Delta' \subseteq \Delta$.

Csempe átíró nyelvtan (Tile Rewriting Grammar, TRG)

Csempe átíró nyelvtan egy $G = (\Sigma, N, S, R)$ négyes, ahol

- Σ a terminális ábécé
- N a nemterminális ábácé
- S a kezdőszimbólum
- $R \subseteq N \times (LCVX_N(N \cup \Sigma) \cup FIN(\Sigma))$ szabályok véges halmaza.

Nemterminális részképek blokkolása

N-blokkolás

Legyen N egy véges halmaz. N-blokkolásnak nevezzük azt a

$$\square_N : (\Sigma \cup N)^{+,+} \to \big(\Sigma \cup (N \times \mathcal{M})\big)^{+,+}$$

leképezést, mely bármely N-konvex kép minden maximális A-homogén q részképét $\square(q)$-val helyettesíti, minden $A \in N$-re.

Levezetés

Levezetés

Legyen $G = (\Sigma, N, S, R)$ egy TRG. A G szerinti egy lépésben történő levezetés a következő reláció:

$$\Rightarrow_G \subseteq \left(\Sigma \cup (N \times \mathcal{M})\right)^{+,+} \times \left(\Sigma \cup (N \times \mathcal{M})\right)^{+,+},$$

melyre $p \Rightarrow_G p'$ akkor és csak akkor, ha

- $|p| = |p'|$
- $\exists A \to \Omega \in R$, melyre
- $\exists r \trianglelefteq_{(i,j)} p$, r blokk A-homogén kép
- $\exists \omega \in \Omega$, $|\omega| = |r|$, hogy
- $p' = p[\Box_N(\omega)/r]_{(i,j)}$.

Csempéző nyelvtanok kifejező ereje

G által generált nyelv

A $G = (\Sigma, N, S, R)$ TRG **által generált nyelv**

$$L(G) := \{\, p \in \Sigma^{+,+} \mid \Box(S^{|p|}) \Rightarrow^*_G p \,\}$$

TRG nyelvek

Jelölje TRG a csempe átíró nyelvtannal generálható nyelvek osztályát,

1. tétel.

$$\mathrm{TS} \subsetneq \mathrm{TRG}$$

$\mathrm{TS} \subsetneq \mathrm{TRG}$ bizonyítása I.

5. lemma. $\mathrm{TS} \subseteq \mathrm{TRG}$.

Bizonyítás.

1. $\mathrm{LOC}_{\mathrm{u,eq}} \subseteq \mathrm{TRG}$, mert

   $$L = \mathrm{LOC}_{\mathrm{u,eq}}(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\})\text{-et}$$

   generálja

   $$S \to \mathrm{LOC}_{\mathrm{u,eq}}(\{\omega_1\}) \mid \ldots \mid \mathrm{LOC}_{\mathrm{u,eq}}(\{\omega_n\}).$$

2. $\mathrm{TS}_{\mathrm{u,eq}} = \pi(\mathrm{LOC}_{\mathrm{u,eq}})$ és TRG zárt a projekciókra (π) nézve.
3. $\mathrm{TS}_{\mathrm{u,eq}} = \mathrm{TS}$, mint korábban láttuk (a 3. állításban).

$\mathrm{TS} \subsetneq \mathrm{TRG}$ bizonyítása II.

6. lemma. $\mathrm{TS} \neq \mathrm{TRG}$.

Bizonyítás.

1D-ben (szavakra) $\mathrm{REG} \subsetneq \mathrm{CF} \setminus \{\lambda\} = \mathrm{TRG}$.
Általánosan: Legyen $\Sigma = \{ a, b \}$. A következő nyelv nem TS (ld. [6]), de TRG:

$$L = \{p \in \Sigma^{+,+} \mid p \text{ minden oszlopa palindróm szó } (\in \Sigma^{+})\}.$$

$L = L(G)$ a következő nyelvtanra:

$$S \to \begin{bmatrix} X & S & S \\ X & S & S \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} X & S \\ X & S \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix}$$

$$X \to \begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \mid \begin{matrix} b \\ b \end{matrix} \mid \begin{bmatrix} a \\ X \\ X \\ a \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} b \\ X \\ X \\ b \end{bmatrix}.$$

Ahol $[p]$ jelöli azt a korlátozott lokális nyelvet, melynek csempéi p csempéivel megegyeznek.

Nemrekurzív nyelvtanok

Nemrekurzív TRG

Egy $G = (\Sigma, N, S, R)$ TRG-t **nemrekurzívnak** mondunk, ha

$$A \Rightarrow_G^* p$$

esetén p-ben nincs blokk-A-homogén részkép ($A \in N$).
Jelölje nrTRG a nemrekurzív TRG-kel generálható képnyelvek osztályát.

2. tétel.

$$\mathrm{TS} = \mathrm{nrTRG}$$

A 2. tétel bizonyítása

2. tétel.

$$\mathrm{TS} = \mathrm{nrTRG}$$

Bizonyítás vázlat.

1. $\mathrm{TS} \subseteq \mathrm{nrTRG}$, mint korábban, mert a $\mathrm{LOC}_{\mathrm{u,eq}}$-hoz megadott nyelvtanok nemrekurzívak.
2. $\mathrm{nrTRG} \subseteq \mathrm{TS}$, mert ha n darab nemterminális van egy nemrekurziv G nyelvtanban, akkor n ismételt blokkhelyettesítéssel $L(G)$ megkapható, és TS zárt a blokkhelyettesítésre.

Környezetfüggetlen képnyelvtanok (O. Matz [4])

Egy más megközelítés

Mondatformák

Legyen V egy ábécé.

$$\mathrm{SF}(V) := \{\, t \mid t\ V \text{ elemeiből, a } \oplus \text{ és } \ominus \text{ binér műveleti jelekkel képzett term } \}.$$

Minden $t \in \mathrm{SF}(V)$ legfeljebb egy $[\![t]\!]$-vel jelölt képet ad meg.
Pl. $V = \{a, b, c, d\}$ esetén ha

$$t = (a \ominus b) \oplus (c \ominus d)$$

akkor

$$[\![t]\!] = \begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix}.$$

Ugyanakkor $a \oplus (c \ominus d) \oplus d$ nem ad meg képet.

Környezetfüggetlen képnyelvtanok: CFPG

Környezetfüggetlen képnyelvtan (Context-free Picture Grammar, CFPG)

CFPG egy $G = (\Sigma, N, S, R)$ négyes, ahol

- Σ a terminális ábécé
- N a nemterminális ábácé
- S a kezdőszimbólum
- $R \subseteq N \times \mathrm{SF}(N \cup \Sigma)$ szabályok véges halmaza.

Levezetés, generált nyelv

$\Rightarrow$, és $\Rightarrow^*$ a szokásos módon definiált. Hiszen, $\oplus$-t és $\ominus$-t terminálisoknak tekintve, a CFPG-k speciális alakú szabályokkal rendelkező szavak feletti környezetfüggetlen nyelvtanok.

$$L(G) := \{ [\![t]\!] \mid t \in SF(\Sigma), S \Rightarrow^* t \}.$$

TRG általánosabb modell CFPG-nél

3. tétel.

$$\mathrm{CFPG} \subsetneq \mathrm{TRG}$$

Bizonyítás I. $\mathrm{CFPG} \subseteq \mathrm{TRG}$

Minden CFPG Chomsky normálalakra hozható, azaz szabályai

$$A \to B \oplus C, \quad A \to B \ominus C, \quad A \to \sigma \qquad A, B, C \in N, \sigma \in \Sigma$$

alakúak. Ha megengedünk $A \to B$ szabályokat, akkor még $B \neq C$ is feltehető.
Végül pl. az $A \to B \oplus C$ ($B \neq C$) CFPG szabálynak megfeleltethetjük az alábbi TRG szabályokat:

$$A \to \begin{bmatrix} B & B & C & C \\ B & B & C & C \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} B & C & C \\ B & C & C \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} B & B & C \\ B & B & C \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} B & C \\ B & C \end{bmatrix} \mid$$

$$\begin{bmatrix} B & B & C & C \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} B & C & C \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} B & B & C \end{bmatrix} \mid \; B \; C \,.$$

A bizonyítás folytatása

Bizonyítás II. $\mathrm{CFPG} \neq \mathrm{TRG}$

Azon képekből álló nyelv, mely pontosan egy b-kből álló sort és pontosan egy b-kből álló oszlopot tartalmaz (a többi betű a.) nem CFPG (ld. [4]) viszont generálható az alábbi TRG-vel[1]:

$$S \to \begin{bmatrix} B & B & A & A \\ B & B & A & A \\ C & C & D & D \\ C & C & D & D \end{bmatrix}; B \to \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \\ b & b \end{bmatrix}; A \to \begin{bmatrix} b & a & a \\ b & a & a \\ b & b & b \end{bmatrix};$$

$$C \to \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}; D \to \begin{bmatrix} b & a & a \\ b & a & a \end{bmatrix};$$

Megjegyzés.

Az is belátható, hogy a fenti nyelv megkapható az egyelemű 1×1-es képnyelvekből a következő műveletek alkalmazásával: $\cup$, $\cap$, $\varobar$, $\ominus$, $*\varobar$, $*\ominus$ így TS nyelv.

---

[1] Az egyszerűség kedvéért itt még azt is feltesszük, hogy a b-s sorok és oszlopok, legalább 2 távolságra vannak a kép szélétől.

Miért / mire jók a csempe átíró nyelvtanok?

Összefoglalás.

1. Bevezettük a csempe átíró nyelvtanokat (TRG), melyek a s szavakra vonatkozó környezetfüggetlen nyelvtanok általánosításainak tekinthetők képnyelvekre.
2. A TRG a csempéző rendszereknek (TS) és a Matz féle környezetfüggetlen képnyelvtanok (CFPG) közös általánosítása.
3. Sőt, a TRG nyelvosztály mind a TS, mind CFPG nyelvosztályt valódi módon tartalmazza.
4. A TRG nyelvosztály a környezetfüggetlen szó nyelvekhez hasonló zártsági tulajdonságokkal rendelkezik.
5. A nemrekurzív TRG-ek pontosan a TS nyelveket jellemzik.

Nyitott kérdések, további lehetséges kutatási területek

Nyitott problémák.

1. A környezetfüggetlen szavakból álló nyelvek mely további eredményei általánsoíthatók a TRG nyelvosztályra?
   Pl. Pumpáló lemma, Chomsky-Schützenberger tétel, stb...
2. Az alkalmazásokhoz (pl. mintaillesztés, képtömörítés) két feltétel biztosan szükséges:
   - megfelelő kifejező erő (e tekintetben az eredmények biztatóak)
   - hatékony elemzési algoritmus kidolgozása (folyamatban).

Irodalomjegyzék I.

[1] A. Cherubini, S. Crespi Reghizzi, M. Pradella and P. San Pietro, Picture Languages: Tiling Systems versus Tile Rewriting Grammars, *Theor. Comput. Sci*, **356(1)**, 2006, 90–103.

[2] D. Giammaresi and A. Restivo, Recognizable picture languages, *Int. J. Pattern Recognition and Artifical Intelligence*, **6(2-3)**, 1992, 241–256.

[3] D. Giammaresi and A. Restivo, Two-Dimensional Languages, in: A. Saloma and G. Rozenberg (eds.), *Handbook of Formal Languages*, vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 215–267.

[4] O. Matz, Regular Expressions and Context-Free Grammars for Picture Languages, in: *Proc. of 14th Annu. Symp. on Theor. Aspects of Comp. Sci.*, LNCS **1200**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 283–294.

Irodalomjegyzék II.

[5] S. Crespi Reghizzi, M. Pradella, Tile Rewriting Grammars, in: *Proc. of Seventh Internat. Conf. on Developments in Language Theory (DLT 2003)*, LNCS **2710**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 206–217.

[6] S. Crespi Reghizzi, M. Pradella, Tile Rewriting Grammars and Picture Languages, *Theor. Comp. Sci* , **340(2)**, 2005, 257–272.

[7] D. Simplot, A characterization of recognizable picture languages by tilings by finite sets, *Theor. Comp. Sci* , **218**, 1999, 297–323.