Fabejáró és kavics fabejáró automaták

Muzamel Loránd

muzamel@inf.u-szeged.hu

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Tanszékcsoport
Számítástudomány Alapjai Tanszék
6701 Szeged Árpád tér 2.

2006. Február 6.

Tartalom

- Fogalmak és jelölések
- (Kavics) fabejárás
- (Kavics) fabejáró automaták
- Séták a fákon
- Felismerési kapacitás
- Nyitott problémák

Fogalmak és jelölések

kétváltozós reláció: $\rho \subseteq H_1 \times H_2$

tranzitív lezárt: ρ^+

reflexív, tranzitív lezárt: ρ^*

ábécé: A $A = \{a, b, c\}$

A feletti szavak: A^*, üres szó: ε. $\varepsilon, a, aab, bbac \in A^*$

a w szó i-edik betűje: $w(i)$ $bbac(3) = a$

szavak feletti szavak: $A = \{ac; acc; ab; ac\}$. pld. $[ab; acc; ab; ac] \in A^*$, $[\,] \in A^*$

szavak hossza: $|[w_1; \ldots; w_k]| = k$

A feletti legfeljebb n hosszú szavak hossza: $A^{\leq n}$

Fogalmak és jelölések

rangolt ábécé: $(\Sigma, rank)$, ahol $rank : \Sigma \to \mathbb{N}$ $\Sigma = \{\sigma^{(2)}, \gamma^{(1)}, \alpha^{(0)}\}$

$maxrank(\Sigma) = max\{rank(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}$

Σ feletti fák halmaza: T_Σ $\alpha \in T_\Sigma,\ \sigma(\gamma(\alpha), \alpha) \in T_\Sigma$

fanyelv: $L \subseteq T_\Sigma$

felismerhető fanyelvek osztálya: REC

Fogalmak és jelölések

$t \in T_\Sigma$-beli csúcsok halmaza: $pos(t) \subseteq \{1, \ldots, maxrank(\Sigma)\}^*$

$pos(\sigma(\alpha, \gamma(\alpha))) = \{\varepsilon, 1, 2, 21\}$

Let $u \in pos(t)$.

- $lab(t, u)$: $lab(\sigma(\alpha, \gamma(\alpha)), 2) = \gamma$
- $parent(u)$: $parent(12) = 1,$ $parent(\varepsilon)$ nincs definiálva
- $childno(u)$: $childno(12) = 2,$ $childno(\varepsilon) = 0$

Logika a fákon

<u>elsőrendű (FO) logika:</u>

- elsőrendű (csúcs) változók: $x_1, x_2, \ldots$
- predikátumok: $lab_\sigma(x)$, $x <_i y$, $x = y$
- műveleti jelek: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- kvantorok: $\exists, \forall$

<u>monadikus másodrendű (MSO) logika:</u>

- másodrendű (csúcshalmaz) változók: $X_1, X_2, \ldots$
- másodrendű predikátumok: $x \in X$

<u>s modellje $\phi(x, y)$-nak:</u> (az $u, v \in pos(s)$ csúcsokban)

$$s \models \phi(u, v)$$

Logika a fákon

séta a fákon [EHB99]: $T \subseteq \{(s, u_1, u_2) \mid s \in T_\Sigma, u_1, u_2 \in pos(s)\}$

MSO-ban definiálható séta: A $\phi(x, y)$, MSO formula definiál egy

$$T(\phi) = \{(s, u_1, u_2) \mid s \models \phi(u_1, u_2)\}$$

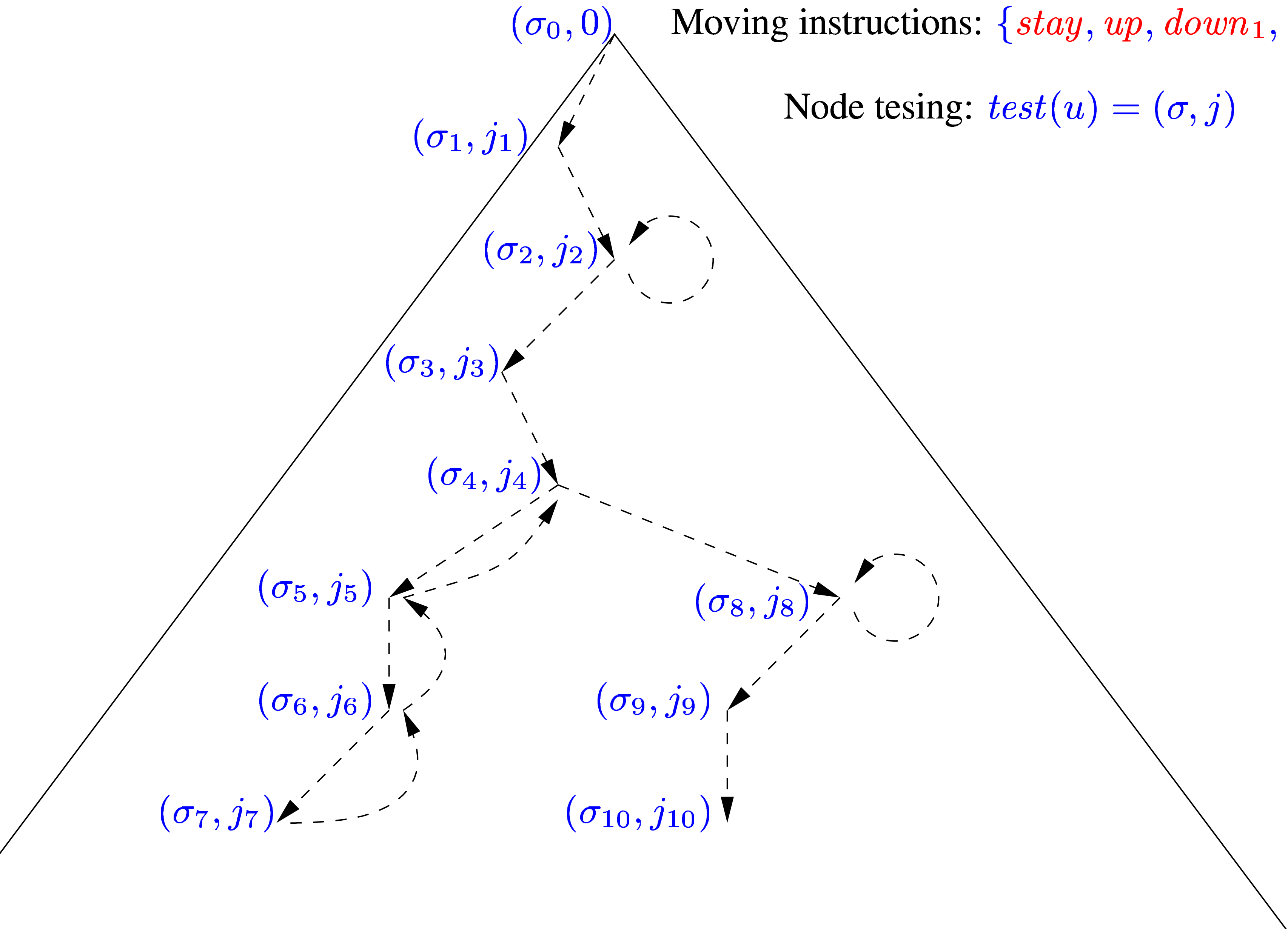
sétát

Ekkor $T(\phi)$ reguláris séta

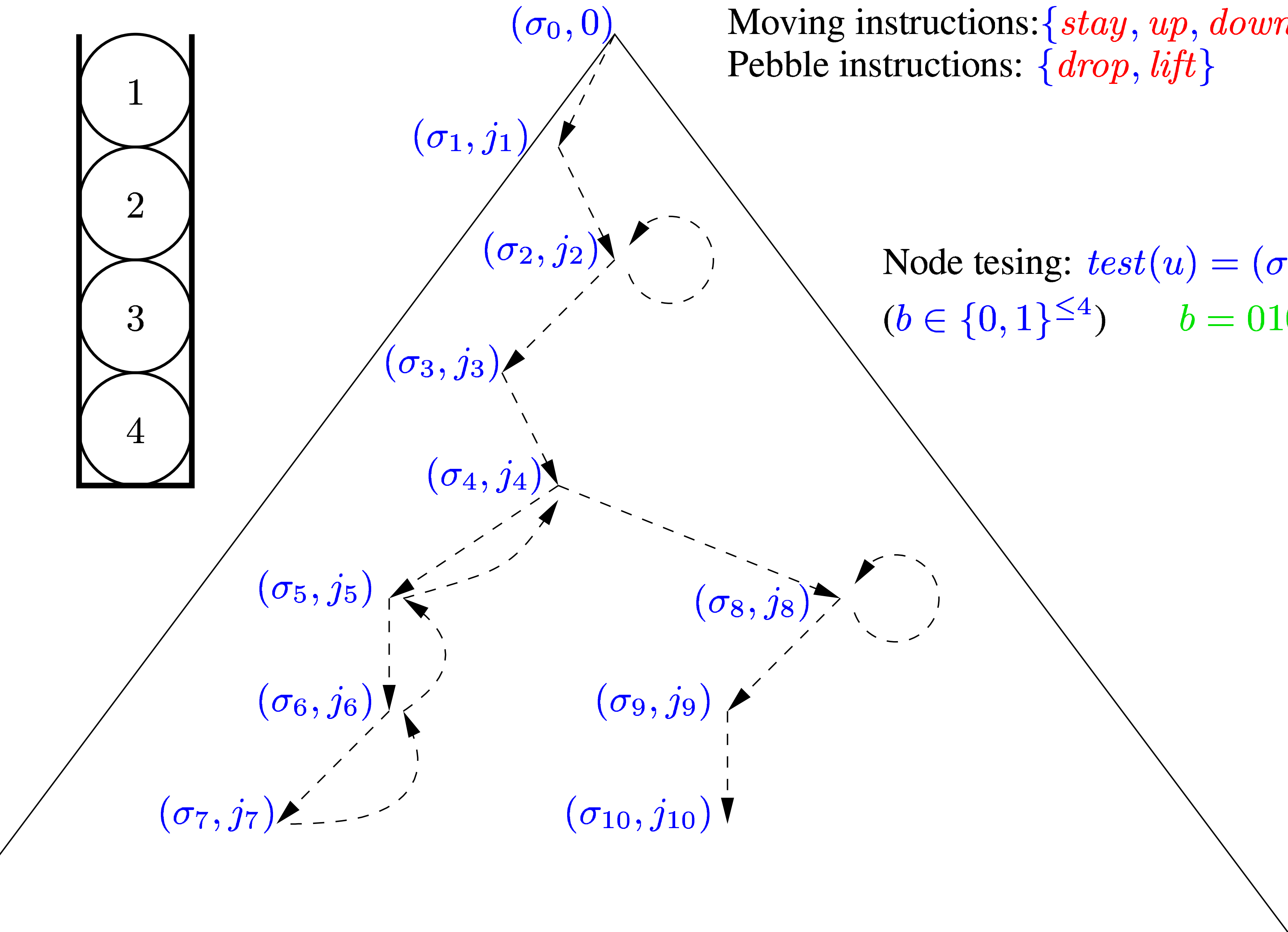
Fabejárás

Moving instructions: $\{stay, up, down_1, \ldots, down_d\}$

Node tesing: $test(u) = (\sigma, j)$



Kavics fabejárás



Moving instructions: $\{stay, up, down_1, \ldots, down_d\}$
Pebble instructions: $\{drop, lift\}$

Node tesing: $test(u) = (\sigma, b, j)$
$(b \in \{0,1\}^{\leq 4})$ $\quad b = 010$

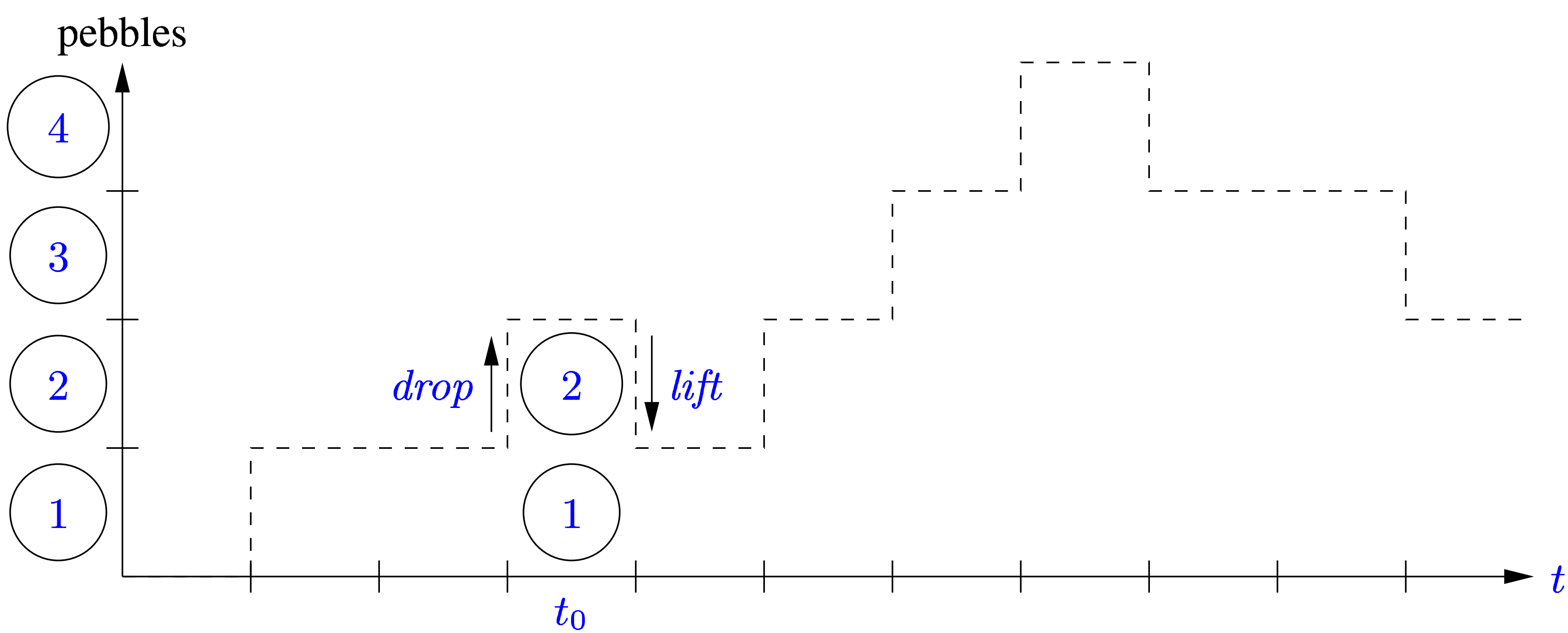
Kavics fabejárás

<u>Kavics lerakás:</u>

- mindig a verem tetejéről

<u>Kavics felvétel:</u>

- mindig a pointer által mutatott csúcsól
- mindig a legnagyobb számú kavicsot



Kavics fabejáró automaták [EH99]

szintaxis (n-kavics fabejáró automata): $A = (Q, \Sigma, q_0, q_{igen}, R)$

- Q állapotok halmaza
- Σ input ábécé
- $q_0 \in Q$ kezdőállapot
- $q_{igen} \notin Q$ a végállapot
- R szabályok véges halmaza

pl: $\langle q, \sigma, 010, j \rangle \to \langle q', down_2 \rangle$

speciális esetek:

- A lehet determinisztikus
- A lehet fabejáró automata (0-kavics eset [AU71])

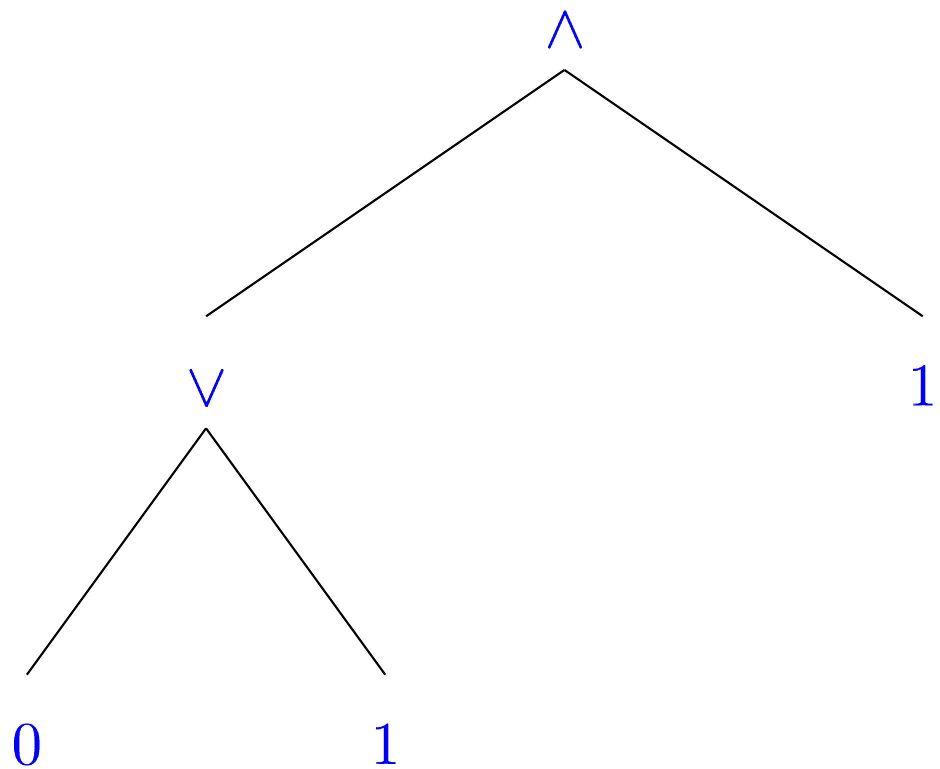
Kavics fabejáró automaták [EH99]

<u>szemantika:</u> (A kavics fabejáró automata, $s \in T_\Sigma$ egy rögzített input fa)

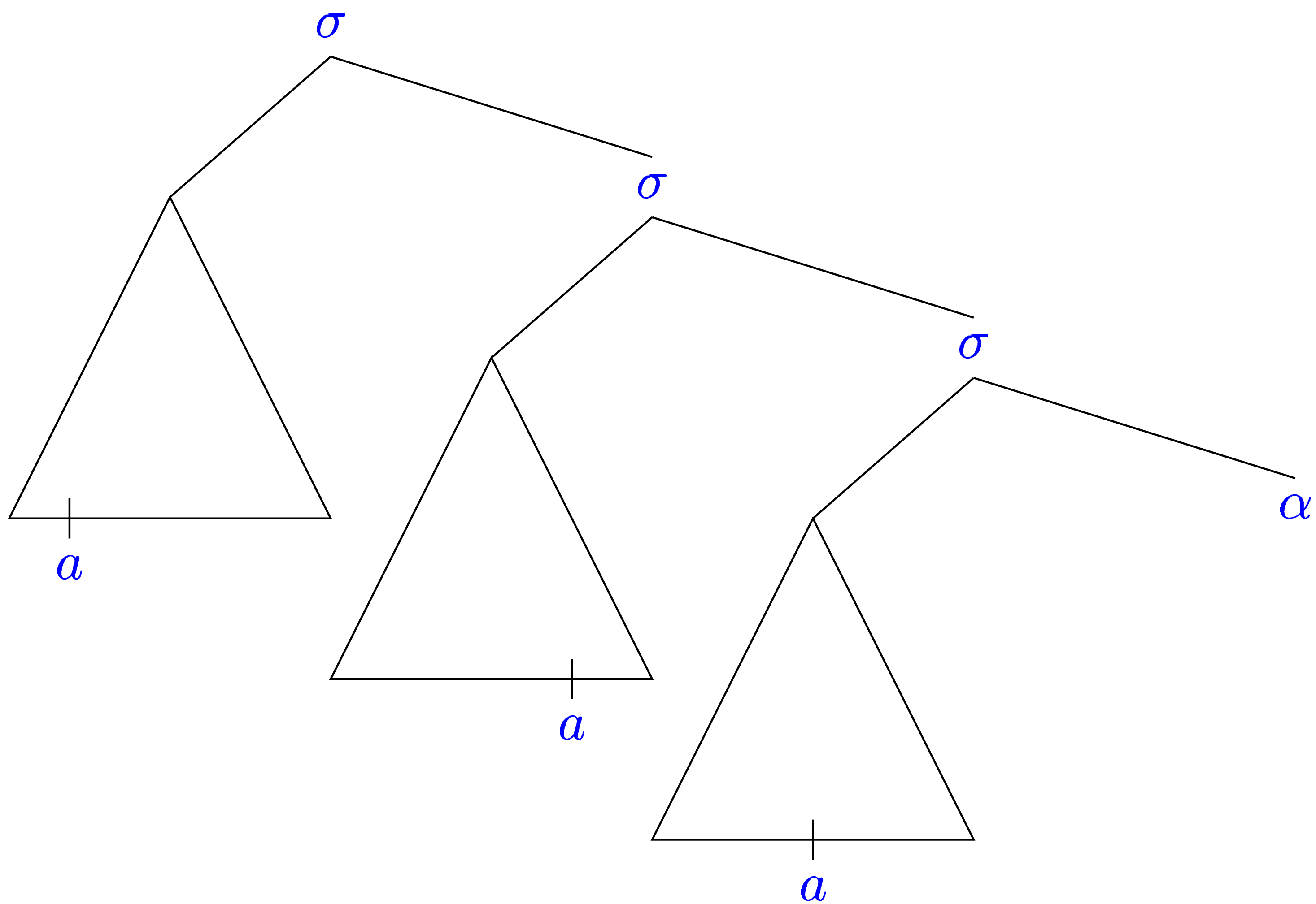
- konfiguráció: $\langle q, (u, [u_1, \ldots, u_k])\rangle$ ($\langle q, h\rangle$)
- konfigurációk halmaza: $C_{A,s}$
- átmeneti reláció: $\langle q, h\rangle \vdash_{A,s} \langle q', h'\rangle$
- A által felismert nyelv:
  $L(A) = \{s \in T_\Sigma \mid \langle q_0, (\varepsilon, [\,])\rangle \vdash^*_{A,s} \langle q_{igen}, (\varepsilon, [\,])\rangle\}$
- A által felismert séta: $T(A) = \{(s, u_1, u_2) \mid s \in T_\Sigma,\ u_1, u_2 \in pos(s),\ \langle q_0, (u_1, [\,])\rangle \vdash^*_{A,s} \langle q_{igen}, (u_2, [\,])\rangle\}$
- nyelvosztályok: $n\text{-}PTWA$, $n\text{-}dPTWA$, TWA, $dTWA$

Tétel [BC04, BC05]: $dTWA \subsetneq TWA \subsetneq REC$.

Kavics fabejáró automaták [EH99]



Kavics fabejáró automaták [EH99]



MSO tesztes fabejáró automaták

általánosított 0-kavics fabejáró automaták

$$\langle q, \sigma, j, \phi(x)\rangle \rightarrow \langle q', up\rangle$$

A által felismert nyelv: $L(A) = \{s \in T_\Sigma \mid \langle q_0, \varepsilon\rangle \vdash^*_{A,s} \langle q_{igen}, \varepsilon\rangle\}$

A által felismert séta:
$T(A) = \{(s, u_1, u_2) \mid s \in T_\Sigma,\ u_1, u_2 \in pos(s),\ \langle q_0, u_1\rangle \vdash^*_{A,s} \langle q_{igen}, u_2\rangle\}$

Tétel [BE97]: Az MSO logikával definiálható séták osztálya és az MSO tesztes fabejáró automatákkal felismerhető séták osztálya megegyezik.

Következmény [BE97]: Az MSO tesztes fabejáró automatákkal felismerhető nyelvek osztálya pontosan a felismerhető nyelvek osztálya.

Felismerési kapacitás

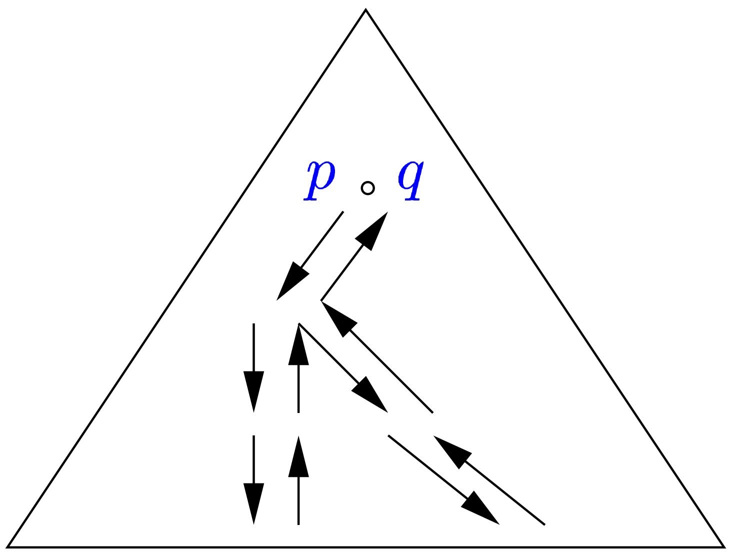
Tétel [EH99]: Tetszőleges $n \geq 0$ esetén $n\text{-}PTWA \subseteq REC$.

Bizonyítás: n-szerinti indukcióval belátjuk, hogy $T(A)$ MSO-definiálható séta.

(i) $n = 0$ esetén következik a klasszikus eredményből.

(ii) Tegyük fel, hogy $n \geq 1$ és legyen A egy n-kavics fabejáró automata.

- Tekintsünk A-nak egy olyan részszámítását s-en, amely az 1-es kavics élettartamát mutatja.



Felismerési kapacitás

- Megkonstruálható olyan A', $(n-1)$-kavics automata, amely a fenti számítást szimulálja s'-n.
- s' ugyanaz, mint s, csak az 1-es kavics csúcsa σ' alakú.
- A'-nek p a kezdő, q pedig a végállapota.
- Tehát az indukciós hipotézis miatt $T(A')$ MSO-definiálható séta.
- Ekkor van olyan $\phi'(x_1, x_2)$ MSO formula, hogy $T(A') = T(\phi')$.
- Ebből megkonstruálunk egy olyan $\phi(x_1, x_2, y)$, MSO formulát, amelyet $\phi'(x_1, x_2)$-ből nyerünk:
  - $lab_{\sigma'}(z)$ helyett mindenhol $lab_\sigma(z) \wedge z = y$-t,
  - $lab_\sigma(z)$ helyett mindenhol $lab_\sigma(z) \wedge z \neq y$-t írunk.
- Végül megkonstruáljuk azt az A'', MSO-tesztes automatát, amely a megfelelő csúcsokban $\Phi(x) = \phi(x, x, x)$ alakú formulákat tesztel, és A "külső mozgásait" szimulálja.
- Ekkor $L(A) = L(A'')$.

Nyitott problémák

- Igaz-e, hogy $0\text{-}PTWA \subsetneq 1\text{-}PTWA \subsetneq 2\text{-}PTWA \subsetneq \dots$?
- Igaz-e, hogy $\bigcup_{n \geq 0} n\text{-}PTWA = REC$?

Erős kavics faautomaták [EH05]: a legnagyobb kavicsot messziről is felveheti

- Igaz-e, hogy $n\text{-}PTWA = n\text{-}sPTWA$?

  ($n = 1$ esetben $1\text{-}PTWA = 1\text{-}sPTWA$)

References

[AU71] A. V. Aho and J. D. Ullman. Translations on a context–free grammar. *Inform. Control*, 19:439–475, 1971.

[BC04] Mikolaj Bojanczyk and Thomas Colcombet. Tree-walking automata cannot be determinized. In *Proceedings of the 31st International Conference on Automata, Languages, and Programming*, pages 246–256. Springer-Verlag, 2004.

[BC05] Mikolaj Bojanczyk and Thomas Colcombet. Tree-walking automata do not recognize all regular languages. In *STOC '05: Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 234–243, New York, NY, USA, 2005. ACM Press.

[BE97] R. Bloem and J. Engelfriet. Characterization of properties and relations defined in monadic second order logic on the nodes of trees. Technical Report Technical Report 97-03, Leiden University, August 1997.

[EH99] Joost Engelfriet and Hendrik Jan Hoogeboom. Tree-walking pebble automata. In *Jewels are Forever, Contributions on Theoretical Computer Science in Honor of Arto Salomaa*, pages 72–83, London, UK, 1999. Springer-Verlag.

[EH05] J. Engelfriet and Hendrik Jan Hoogeboom. Automata with nested pebbles capture first-order logic with transitive closure. Technical Report 05-02, Leiden University, The Netherlands, April 2005.

[EHB99] J. Engelfriet, H. J. Hoogeboom, and J.-P. Van Best. Trips on Trees. *Acta Cybernet.*, 14:51–64, 1999.